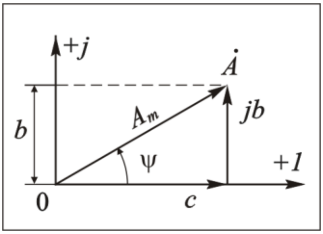
თავი IV. კომპლექსური ამპლიტუდების მეთოდი

ელექტრულ წრედებში შემავალი და გამომავალი ცვლადი პერიოდული სიდიდეები აღიწერება გრაფიკულად, ტრიგონომეტრიული ფუნქციის შემცველი განტოლებების გამოყენებით, დეკარტულ სიბრტყეზე ვექტორების სახით წარმოდგენით, ან კომპლექსური რიცხვების გამოყენებით.

რთული ელექტრული წრედებისათვის ტრიგონომეტრიული ფუნქციების გარდაქმნას შემოაქვს სირთულეები.

ამოცანის გადაწყვეტის გამარტივებისათვის გამოიყენება კომპლექსური რიცხვების შემოტანა, რაც საშუალებას იძლევა ცვლადი ტრიგონომეტრიული ფუნქცია ან გეომეტრიული ოპერაციები ვექტორებზე შევცვალოთ ალგებრული ოპერაციებით კომლექსურ რიცხვებზე, რაც მნიშვნელოვნად ზრდის მიღებული რეზულტატების სიზუსტეს.

4.1. კომპლექსური რიცხვები



კომპლექსურ სიბრტყეზე (ნახ. 4.1.) ნებისმიერ კომპლექსურ ვექტორს $\dot{A}$ შეესაბამება გარკვეული კომპლექსური რიცხვი, რომელიც შესაძლებელია ჩაიწეროს შემდეგი ფორმებით:

ნახ. 4.1.

ალგებრული $\dot{A} = c + jb$;

ტრიგონომეტრიული $\dot{A} = A(cos\psi + jsin\psi)$;

მაჩვენებლიანი $\dot{A} = Ae^{j\psi} = A \cdot exp(j\psi)$;

პოლარული (კუთხის) $\dot{A} = A < \psi$.

ალგებრული სახით ჩაწერილი კომპლექსური რიცხვი შედგება ნამდვილი $A\,cos\psi = \mathrm{Re}[\dot{A}]$ და წარმოსახვითი $A\,sin\psi = \mathrm{Im}[\dot{A}]$ ნაწილებისაგან, სადაც Re და Im ინგლისური ტერმინების შემოკლებული ჩანაწერია *real* (რეალური, ნამდვილი) და *imaginairy* (წარმოსახვითი).

კომპლექსურ რიცხვში განსაკუთრებული მნიშვნელობა ენი-ჭება ***j*** მობრუნების ოპერატორს, რომელსაც ამავდროულად უწოდებენ წარმოსახვით ერთიანს, ვინაიდან ის რიცხობრივად ტოლია კვადრატული ფესვისა -1 –დან, ანუ:

$$j = \sqrt{-1} = e^{j\frac{\pi}{2}}.$$

თუ ვექტორს გავამრავლებთ $+j$ -ზე, მაშინ ის მოტრიალდება $\pi/2=90^0$ კუთხით საათის ისრის საპირისპირო მიმართულებით, ხოლო გამრავლებისას $-j$ - ვექტორი მობრუნდება $\pi/2=90^0$ საა-თის ისრის თანხვდენილი მიმართულებით.

კომპლექსური რიცხვის მოდული ყოველთვის დადებითი რიცხვია $$A = |\dot{A}| = \sqrt{b^2 + c^2} = \frac{b}{\sin\psi} = \frac{c}{\cos\psi}.$$

კომპლექსური რიცხვის კუთხე (ან არგუმენტი) უდრის

$$\psi = arctg\frac{b}{c}.$$

კომპლექსური რიცხვის **მაჩვენებლიანი** ფორმით ჩაწერა გახ-და შესაძლებელი **ეილერის** მიერ დამტკიცებულ ფორმულის გა-მოყენების შემდეგ $cos\psi \pm jsin\psi = e^{\pm j\psi}$.

კომპლექსური რიცხვის $\dot{A} = c + jb = Ae^{+j\psi}$ **კომპლექსურად შეუღლებული რიცხვია** $A^* = c - jb = Ae^{-j\psi}$. მათი ნამრავლი $\dot{A} \cdot A^* = Ae^{j\psi} \cdot Ae^{-j\psi} = A^2$ ნამდვილი რიცხვია და უდრის რიცხ-ვის მოდულის კვადრატს.

4.2. მოქმედებები კომპლექსურ რიცხვებზე

მოცემული გვაქვს ორი კომპლექსური რიცხვი: $\dot{A} = c + jb$ და $\dot{B} = m + jn$. შევასრულოთ მათზე მათემატიკური მოქმედებები

კომპლექსური რიცხვების მიმატება და გამოკლება

$$\dot{A} \pm \dot{B} = (c + jb) \pm (m + jn) = (c \pm m) + j(b \pm n)$$

კომპლექსური რიცხვების $\dot{A}$ ***გამრავლება*** რიცხვზე $e^{j\varphi}$ კომ-პლექსურ სიბრტყეზე დაიყვანება $\dot{A}$ ვექტორის მობრუნებაზე φ კუთხით: $\dot{A} \cdot e^{j\varphi} = Ae^{j\psi}e^{j\varphi} = Ae^{j(\psi+\varphi)}$.

კომპლექსური რიცხვების გამრავლება

$$\dot{A}\cdot\dot{B}=(c+jb)(m+jn)=(cm-bn)+j(cn+bm)=$$
$$=A_m e^{j\psi}B_m e^{j\varphi}=A_m B_m e^{j(\psi+\varphi)}$$

კომპლექსური რიცხვების გაყოფა. გაყოფისას მნიშვნელი და მრიცხველი უნდა გავამრავლოთ მნიშვნელის შეუღლებულ კომპლექსურ რიცხვზე. მაშინ მნიშვნელი ნამდვილი დადებითი რიცხვი გახდება.

$$\frac{\dot{A}}{\dot{B}}=\frac{\dot{A}B^*}{\dot{B}B^*}=\frac{(c+jb)(m-jn)}{(m+jn)(m-jn)}=\frac{cm+bn}{m^2+n^2}+j\frac{bn-nc}{m^2+n^2}=$$
$$=\frac{A\,e^{j\psi}}{B\,e^{j\varphi}}=\frac{A}{B}e^{j(\psi-\varphi)}.$$

ხარისხში ახარისხება

$$\dot{A}^k=(A\,e^{j\psi})^k=A^k e^{j\psi k}=A^k(\cos k\psi+j\sin k\psi)$$

ფესვიდან ამოღება

$$\sqrt[n]{\dot{A}}=\sqrt[n]{A\,e^{j\psi}}=\sqrt[n]{A}\cdot e^{j\frac{\psi+2\pi k}{n}}$$ **,** სადაც k – მთელი რიცხვია,

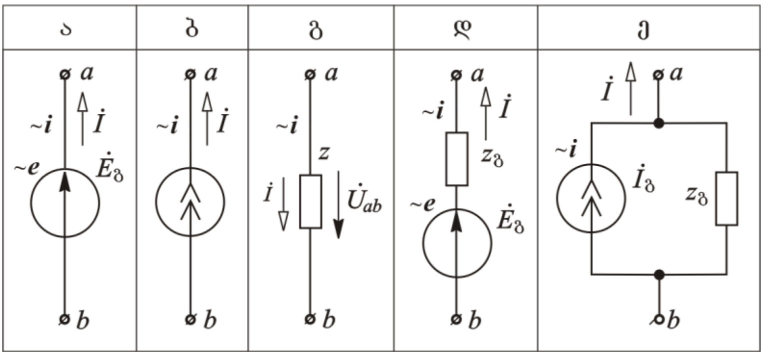
$2\pi k$ - პერიოდი.

4.3. კომპლექსური რიცხვების გამოყენება ელექტრულ წრედებში

კომპლექსური რიცხვების შემოტანით არ იცვლება ელექტრული პარამეტრების (დენის, ძაბვის და ემძ-ის) მოქმედი მნიშვნელობის გამოსახულება და ის $\sqrt{2}$ -ჯერ ნაკლებია მათ ამპლიტუდურ მნიშვნელობებზე.

ნახ. 4.2.–ზე მოყვანილია ელექტრული წრედის ზოგიერთი ელემენტები.

ძაბვის წყაროს (ნახ. 4.2.ა) ემძ-ის გამოსახულებიდან გამო-



ნახ. 4.2.

მდინარე $e = E_m sin(\omega t + \psi)$ შეგვიძლია მთლიანად დავახასიათოთ კომპლექსური ამპლიტუდით $\dot{E}_m = E_m e^{j\psi}$ ან ემძ-ის კომპლექსური მოქმედი მნიშვნელობით $\dot{E} = E\, e^{j\psi}$, სადაც ($E = \frac{E_m}{\sqrt{2}}$).

დენის წყაროს (ნახ. 4.2.ბ) $i = I_m sin(\omega t + \psi)$ გამოსახულებიდან გამომდინარე შეგვიძლია მთლიანად დავახასიათოთ **კომპლექსური ამპლიტუდით** $\dot{I}_m = I_m e^{j\psi}$ ან დენის **კომპლექსური მოქმედი მნიშვნელობით** $\dot{I} = I\, e^{j\psi}$, სადაც ($I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$).

პასიური ელემენტი (ნახ. 4.2.გ) განისაზღვრება მისი **კომპლექსური წინაღობით** $\dot{Z} = ze^{j\psi}$ (კომპლექსური რიცხვით), რომელიც უდრის ელემენტის მომჭერებზე მოდებული კომპლექსური ძაბვის შეფარდებას იგივე ელემენტში გამავალ კომპლექსურ დენთან, ანუ $\dot{Z} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = r + jx = Ze^{j\psi}$, სადაც

$\dot{U}$ და $\dot{I}$ ძაბვის და დენის მოქმედი კომპლექსური მნიშვნელობებია;

- r - კომპლექსური წინაღობის Z – ს ნამდვილი ნაწილია და უდრის წრედის აქტიურ წინაღობას;
- x - კომპლექსური წინაღობის Z – ს წარმოსახვითი ნაწილია და უდრის წრედის რეაქტიულ წინაღობას;
- Z - წრედის კომპლექსური წინაღობის $\dot{Z}$ – ს მოდულია და უდრის წრედის სრულ წინაღობას;
- ψ - Z – ს არგუმენტია და უდრის დენსა და ძაბვას შორის ფაზათა წანაცვლებას.

კომპლექსური წინაღობის Z შებრუნებული სიდიდე Y **კომპლექსური გამტარობაა** $Y = \frac{\dot{I}}{\dot{U}} = g - jb = ye^{-j\psi}$, სადაც g – კომპლექსური გამტარობის Y – ს ნამდვილი ნაწილია და უდრის წრედის აქტიურ გამტარობას; b - კომპლექსური გამტარობის Y – ს წარმოსახვითი ნაწილია და უდრის **წრედის რეაქტიულ გამტარობას**; y - წრედის კომპლექსური წინაღობის Y – ს მოდულია და უდრის წრედის სრულ გამტარობას; ψ - Y – ს არგუმენტია

და უდრის დენსა და ძაბვას შორის ფაზათა წანაცვლებას შებრუნებული ნიშნით.

ენერგიის წყარო დანაკარგებით შეიძლება წარმოვიდგინოთ **ძაბვის გენერატორის** სახით (ნახ. 4.2.დ) პარამეტრებით $\dot{E}_გ$ და $Z_გ$ ან **დენის გენერატორის** სახით (ნახ. 4.2.ე) პარამეტრებით $\dot{I}_გ$ და $Z_გ$. ძაბვის გენერატორიდან გადასვლა ექვივალენტური დენის გენერატორზე და შებრუნებით წარმოებს ფორმულის გამოყენებით $\dot{I}_გ = \dot{E}_გ / Z_გ$ ან $\dot{E}_გ = \dot{I}_გ Z_გ$.

4.4. ელექტროტექნიკის კანონების კომპლექსური სახე

ომის კანონი წრედისათვის, რომელიც შედგება კომპლექსუ-რი ***Z*** წინაღობისაგან და არ შეიცავს ემძ-ს (ნახ. 4.2.), ხოლო ძაბვის მიმართულება ემთხვევა დენის დადებით მიმართულებას, ექნება სახე $\dot{U} = \dot{U}_{ab} = -\dot{U}_{ba} = \dot{\varphi}_a - \dot{\varphi}_b = \dot{I}Z.$

კირხჰოფის კანონები. მუდმივი დენის წრედების ანალოგურად ვირჩევთ დენების დადებით მიმართულებებს და აღვნიშნავთ განსახილველი წრედის სქემაზე.

კირხჰოფის პირველი კანონი ელექტრული წრედის კვანძისათვის $\sum_{k=1}^{n} \dot{I}_k = 0$. შეგახსენებთ, რომ განტოლების დაწერისას კვანძში შემავალი დენები უნდა ავიღოთ (+) ნიშნით, ხოლო გამომავალი დენები უნდა ავიღოთ (–) ნიშნით ან საპირისპიროდ.

კირხჰოფის მეორე კანონი გამოიყენება ნებისმიერი ჩაკეტილი ელექტრული წრედისათვის. მისი სახეა

$$\sum_{k=1}^{n} \dot{E}_k = \sum_{k=1}^{n} \dot{I}_k Z_k ,$$

სადაც $\sum_{k=1}^{n} \dot{E}_k$ - ძაბვის წყაროების ემძ-ის ალგებრული ჯამია.

"პლუს" ნიშანს ვწერთ მაშინ, როცა ემძ-ის მიმართულება ემთხვევა წინასწარ არჩეული კონტურის შემოვლის მიმართულებას, ხოლო "მინუს" ნიშნით საპირისპირო შემთხვევაში;

$\sum_{k=1}^{n} \dot{I}_k Z_k$ - ცალკეულ უბნებზე კომპლექსურ წინაღობებ-

ზე Z_k ძაბვის ვარდნა. ნიშნები იწერება ანალოგიურად ზემოთ აღნიშნულისა.

4.5. კომპლექსური სიმძლავრე

კომპლექსური სიმძლავრე არის კომპლექსური ძაბვის და დენის ნამრავლი

$$\dot{S}=\dot{U}I^{*}=UIcos\varphi+jUIsin\varphi=P+jQ=Se^{j\varphi}$$

სადაც $S=UI$ - სრული სიმძლავრეა;

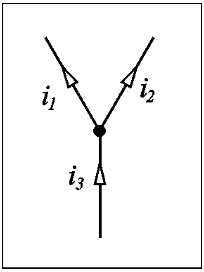
$P=Re[\dot{S}]=Re[\dot{U}I^{*}]=UIcos\varphi$ - აქტიური სიმძლავრე;

$Q=Im[\dot{U}I^{*}]=UIsin\varphi$ - რეაქტიური სიმძლავრე;

I^{*} - $\dot{I}$ კომპლექსური დენის შეუღლე ბული დენია

მაგალითი 1. მოცემულია კომპლექსური დენი $\dot{I}=25e^{j15^0}$ და ძაბვა $\dot{U}=75e^{j37^0}$. იპოვეთ წრედის წინაღობები Z, r და x.

ამოხსნა. კომპლექსური წინაღობა $Z=\dfrac{\dot{U}}{\dot{I}}=\dfrac{75e^{j37^0}}{25e^{j15^0}}=3\cdot e^{j22^0}$, ომი, აქედან $z=3$ ომი; $r=3cos22^0$ ომი და $x=3sin22^0$ ომი.

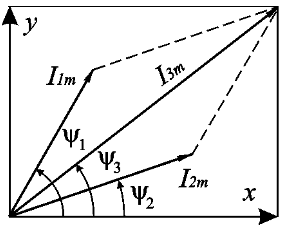


ნახ. 4.3.

მაგალითი 2. მოცემულია კვანძში შემავალი და გამომავალი ერთიდაიგივე სიხშირის დე-ნები (ნახ. 4.3.). იპოვეთ გამომავალი დენის i_3 ამპლიტუდა და საწყისი ფაზა, თუ $i_1=I_{1m}\sin(\omega t+\psi_1)$ და $i_2=I_{2m}\sin(\omega t+\psi_2)$.

ამოხსნა. კირხჰოფის პირველი კანონის თანახმად $i_3=i_1+i_2$, ანუ

$$i_3=I_{1m}\sin(\omega t+\psi_1)+I_{2m}\sin(\omega t+\psi_2)=$$
$$=I_{3m}\sin(\omega t+\psi_3).$$



ნახ.4.4.

ამოცანა ამოიხსნება ვექტორული დი-აგრამის აგებით (იხ. ნახ. 4.4.) ან კომ-პლექსური რიცხვების გამოყენებით.

ვექტორული მეთოდი. საძიებელი დე-ნის ვექტორი უდრის შემავალი დე-ნების ვექტორების გეომეტრიულ ჯამს $\vec{I}_{3m}=\vec{I}_{1m}+\vec{I}_{2m}$, ანუ პარალელოგრამის დიაგონალს. თუ მასშტაბში ავაგეთ ნახაზი, მაშინ პირდაპირ დიაგრამიდან ვპოულობთ პასუხს. და

ბოლოს საძიებელ გამოსახულებაში $i_3 = I_{3m}\sin(\omega t + \psi_3)$ უნდა შევიტანოთ გამოთვლილი მნიშვნელობები.

კომპლექსური მეთოდი იძლევა საშუალებას მოვიძიოთ ამონახსნი მოქმედებებით კომპლექსურ რიცხვებზე:

$$\begin{aligned}\dot{I}_{3m} &= \dot{I}_{1m} + \dot{I}_{2m} = I_{1m}e^{j\psi_1} + I_{2m}e^{j\psi_2} = \\ &= I_{1m}(cos\,\psi_1 + jsin\psi_1) + I_{2m}(cos\,\psi_2 + jsin\psi_2) = \\ &= (I_{1m}cos\,\psi_1 + I_{2m}cos\,\psi_2) + j(I_{1m}sin\psi_1 + I_{2m}sin\psi_2) = \\ &= I_{3m}cos\,\psi_3 + jI_{3m}sin\psi_3 = \ I_{3m}e^{j\psi_3}\end{aligned}$$

$$I_{3m} = \sqrt{(I_{1m}cos\,\psi_1 + I_{2m}cos\,\psi_2)^2 + (I_{1m}sin\,\psi_1 + I_{2m}sin\,\psi_2)^2}$$

$$tg\psi_3 = \frac{I_{1m}sin\psi_1 + I_{2m}sin\psi_2}{I_{1m}cos\,\psi_1 + I_{2m}cos\,\psi_2}\,.$$

* კომპლექსური რიცხვების ჩაწერის ალგებრული ფორმა გამოიყენება მიმატების და გამოკლებისას, ხოლო მაჩვენებლიანი ფორმა – მათ გაყოფის და გამრავლებისას.