

**თავი III. სინუსოიდალური დენის მარტივი ელექტრული წრედები**

ყველა შესაძლო ფორმის პერიოდული დენებიდან ფართოდ მოიხმარება სინუსოიდალური დენი. სხვა ფორმის დენებთან შედარებით სინუსოიდალურ დენს აქვს ის უპირატესობა, რომ იძლევა საშუალებას ეკონომიურად ვაწარმოოთ, გადავცეთ და მოვიხმაროთ გამომუშავებული ელექტრული ენერგია. მხოლოდ სინუსოიდალური დენის გამოყენებით შესაძლებელია ძაბვას და დენს შეეუნარჩუნოთ მრუდების ფორმა რთული ელექტრული წრედების ყველა უბნებზე.

გარდა აღნიშნულისა, როგორც ვიცით, უმეტეს შემთხვევებში ნებისმიერი ფორმის დენი (ძაბვა ან სიგნალი) შეიძლება დაიშალოს სხვადასხვა სიხშირის სინუსოიდალურად ცვლადი სიგნალების ალგებრულ ჯამად.

ამ მიზეზების გამო ელექტროტექნიკის წრედების თეორიაში მნიშვნელოვანი ადგილი უკავია წრედებში სინუსოიდალურად ცვლადი სიდიდეების შესწავლას.

**3.1. სინუსოიდალური ემპ-მბი, ძაბვები და დენები**

ზოგადად, დროში სინუსოიდალურად ცვლადი სიდიდის მკისიერ მნიშვნელობას აქვს სახე

$$a = A_m \sin(\omega t + \varphi) = A_m \sin\left[\omega\left(t + \frac{\varphi}{\omega}\right)\right],$$

- სადაც  $A_m$  მაქსიმალური მნიშვნელობაა, ანუ ამპლიტუდა;  
 $\omega$  - კუთხური სიხშირე. მისი საზომი ერთეულია რადიანი/წამზე (რად/წმ)  
 $\omega t + \varphi$  - ფაზა (ფაზური კუთხე);  
 $\varphi$  - საწყისი ფაზის მნიშვნელობა აღრიცხვის დროის საწყის მომენტში ( $t=0$ ). (საწყისი ფაზური კუთხე);  
 $\frac{\varphi}{\omega}$  - საწყისი ფაზური წანაცვლება.

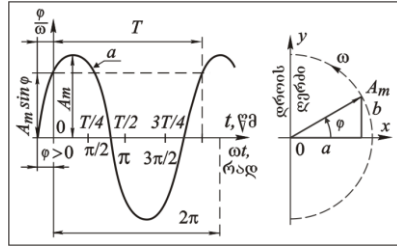
კუთხური სიხშირე  $\omega$ , სიხშირე  $f$  და პერიოდი  $T$  დაკავშირებული არიან თანაფარდობებით

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}; \quad f = \frac{1}{T}.$$

- სადაც  $f$  - დენის სიხშირეა. მისი საზომი ერთეულია პერცი (ჰც);  
 $T$  - პერიოდი. მისი საზომი ერთეულია წამი (წმ).

პერიოდი ეწოდება დროის უმცირეს ინტერვალს, რომლის განმავლობაში ელექტრული დენის მნიშვნელობა მეორდება.

ნახ. 3.1 ნაჩვენებია სინუსოიდა და შესაბამისი ვექტორული დიაგრამა, სადაც ვექტორი  $A_m$  ბრუნავს მუდმივი კუთხური სიჩქარით  $\omega$  საათის ისრის მოძრაობის საპირისპირო მიმართულებით).



ნახ. 3.1.

### 3.2. პერიოდული ემპ-ის, ძაბვის და დენის მოქმედი და საშუალო მნიშვნელობები

#### 3.2.1. პერიოდული ფუნქციის მოქმედი მნიშვნელობები

მუდმივი და ცვლადი პერიოდული დენების მოქმედებების შესაფასებლად მიღებულია მათ მიერ ერთსა და იმავე წინაღობაში და დროის იმავე პერიოდში გამოყოფილი სითბოს ერთნაირი რაოდენობა, ანუ  $Q_+ = Q_-$ .

ცნობილია, რომ ჯოულ-ლენცის კანონის თანახმად პერიოდულად ცვლადი დენისათვის გამოყოფილი სითბოს რაოდენობა გა-

ნისაზღვრება შემდეგნაირად  $Q_+ = \int_0^T i^2 r dt$  . იმავე პერიოდში მუდმი-

ვი დენისათვის კი  $Q_- = I^2 r T$  , მაშინ  $\int_0^T i^2 r dt = I^2 r T$  . ცხადია, რომ

მუდმივი დენი ტოლია  $I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt}$  . რადგან  $i = I_m \sin \omega t + \varphi_i$  ,

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \sin^2(\omega t + \varphi_i) dt} = \sqrt{\frac{1}{T} I_m^2 \int_0^T \frac{[1 - \cos 2(\omega t + \varphi_i)] dt}{2}} = \sqrt{\frac{1}{T} I_m^2 \int_0^T \frac{dt}{2}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} .$$

ვინაიდან ნებისმიერი ჰარმონიული (ჩვენ შემთხვევაში კოსინუსოიდალური) ფუნქციის რხევის ინტეგრალის მნიშვნელობა ერთ

პერიოდში უდრის ნულს, ანუ 
$$\int_0^T \cos 2(\omega t + \varphi_i) dt = 0.$$

ანალოგიურად განისაზღვრება ემპ-ის და ძაბვის მოქმედი მნიშვნელობები  $E = \frac{E_m}{\sqrt{2}} = 0,707E_m$   $U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = 0,707U_m.$

**განსაზღვრა.** პერიოდული დენის მოქმედი მნიშვნელობა რიცხობრივად ისეთი მუდმივი დენის ტოლია, რომელიც იმავე დროის შუალედში, იმავე წინააღობაში გამოყოფს ისეთივე რაოდენობის სითბოს, როგორსაც პერიოდული ელექტრული დენი.

### 3.2.2. პერიოდული ფუნქციის საშუალო მნიშვნელობები

ვინაიდან ერთი პერიოდის განმავლობაში ჰარმონიული ფუნქციის რხევის საშუალო მნიშვნელობის სიდიდე უდრის ნულს, ზოგ შემთხვევაში საჭიროა ვიცოდეთ პერიოდულად ცვლადი ემპ-ის, ძაბვის და დენის **საშუალო მნიშვნელობები** დადებითი ნახევარპერიოდის განმავლობაში.

სინუსოიდალური დენისათვის

$$\begin{aligned} I_{\text{ს.ა.}} &= \frac{2}{T} \int_0^{T/2} i dt = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} I_m \sin(\omega t) dt = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} \frac{1}{\omega} I_m \sin(\omega t) d(\omega t) = \\ &= \frac{2}{T} \cdot \frac{1}{\omega} I_m (-\cos(\omega t)) \Big|_0^{T/2} = -\frac{2}{T} \cdot \frac{1}{\omega} I_m [(\cos(\omega \frac{T}{2}) - \cos(\omega \cdot 0))] = \frac{2}{\pi} I_m = \\ &= 0,637 I_m \end{aligned}$$

ანალოგიურად მივიღებთ  $E_{\text{ს.ა.}} = \frac{2}{\pi} E_m = 0,637 E_m;$

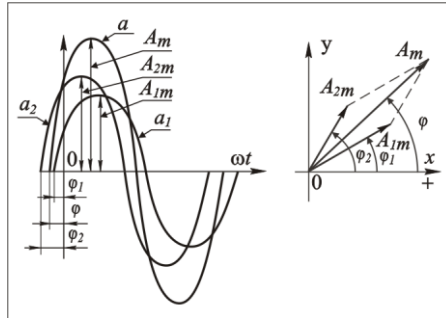
$$U_{\text{ს.ა.}} = \frac{2}{\pi} U_m = 0,637 U_m.$$

**მაგალითი:** ვიპოვოთ  $U = 16 \sin(\omega t + 15^\circ)$ , ვ ძაბვის მოქმედი და საშუალო მნიშვნელობები.

**ამოხსნა:**  $U = \frac{16}{\sqrt{2}} \approx 11,3$  ვ და  $U_{\text{ს.ა.}} = \frac{2 \cdot 16}{3,14} \approx 10,2$

**3.3. ერთი და იგივე სიხშირის სინუსოიდების შეკრება**

თუ გვაქვს ერთიდაიგივე სიხშირის ორი სინუსოიდა  $a_1 = A_{1m} \sin(\omega t + \phi_1)$  და  $a_2 = A_{2m} \sin(\omega t + \phi_2)$  მიღება ფაზით წანაცვლებული იგივე სიხშირის  $a$  სახის სინუსოიდა (იხ. ნახ. 3.2.)



ნახ. 3.2.

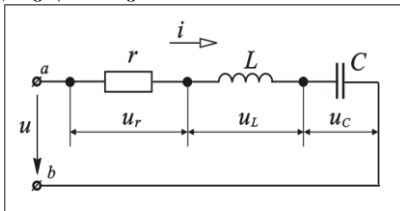
$$a = a_1 + a_2 = A_{1m} \sin(\omega t + \phi_1) + A_{2m} \sin(\omega t + \phi_2) = A_m \sin(\omega t + \phi) .$$

მიღებული სინუსოიდის  $A_m$  ამპლიტუდა და ფაზა  $\phi$  უდრის

$$\left. \begin{aligned} A_m &= \sqrt{A_{1m}^2 + A_{2m}^2 + 2A_{1m}A_{2m}\cos(\phi_1 - \phi_2)}; \\ \operatorname{tg}\phi &= \frac{A_{1m}\sin\phi_1 + A_{2m}\sin\phi_2}{A_{1m}\cos\phi_1 + A_{2m}\cos\phi_2} . \end{aligned} \right\}$$

**3.4. სინუსოიდალური დენის და ძაბვის მყისიერი მნიშვნელობები მიმდევრობით შემერთებული  $r, L$  და  $C$  ელემენტებისაგან შედგენილ წრეწში**

კირხჰოფის მეორე კანონის თანახმად მიმდევრობით შემერთებული  $r, L$  და  $C$  ელემენტებისაგან შედგენილი ერთკონტურიანი წრედისათვის (ნახ. 3.3.)  $u = u_r + u_L + u_C$ , სადაც  $u_r$  - ძაბვის ვარდნაა აქტიურ წინაღობაზე;



$u_L$  - ძაბვის ვარდნაა ინდუქტიურობაზე, ამასთან

$$u_L = -e_L = L \frac{di}{dt} ,$$

$e_L$  - თვითინდუქციის ემძაა, სოლო ცვლადი დენი

ნახ. 3.3.

უდრის  $i = \frac{1}{L} \int_0^t u_L dt + i(0)$ ;  $u_C$  - ძაბვის ვარდნა ტევადობაზე.

დენი ტოლია  $i = C \frac{du_C}{dt}$ , ხოლო ძაბვა  $u_C = \frac{1}{C} \int_0^t i dt + u_C(0)$ .

ვინაიდან წრედი ჩართულია ცვლად ძაბვაზე  $u = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$ , და მასში გადის ცვლადი დენი  $i = I_m \sin(\omega t + \varphi_u - \varphi)$ , მაშინ დენის და ძაბვის ამპლიტუდური მნიშვნელობებისათვის ომის კანონს ექნება სახე:

$$I_m = \frac{U_m}{z} = \frac{U_m}{\sqrt{r^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{r}; \quad (-90^\circ \leq \varphi \leq +90^\circ).$$

ძაბვის და დენის მოქმედი მნიშვნელობებისათვის ომის კანონს ექნება სახე:

$$I = \frac{U}{z} = \frac{U}{\sqrt{r^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} = \frac{U}{\sqrt{r^2 + (x_L - x_C)^2}} = \frac{U}{\sqrt{r^2 + x^2}} = \frac{U}{z},$$

სადაც  $x_L = \omega L$  ინდუქტიური წინაღობაა;

$x_C = 1/\omega C$  - ტევადური წინაღობა;

$x = x_L - x_C$  - რეაქტიული წინაღობა;

$z = \sqrt{r^2 + x^2}$  - სრული წინაღობა.

### 3.5. ძაბვის, დენის და წინააღობის სამკუთხედი

იდეალურ ინდუქტიურ და ტევადურ წინააღობებში ცვლადი დენის მოქმედება იწვევს ძაბვის და დენის ერთმანეთის მიმართ ფაზით დაძვრას. ეს არ ეხება რეზისტორულ წინააღობებს, რომლებშიც დენის და ძაბვის მიმართულებები (ფაზები) ემთხვევა ერთმანეთს.

ინდუქტიურ წინააღობებში მოდებული ძაბვა უსწრებს დენის მიმართულებას  $90^\circ$  გრადუსით, ხოლო ტევადურში დენის მიმართულება უსწრებს ძაბვის მიმართულებას  $90^\circ$  გრადუსით.

**თავი III. სინუსოიდალური დენის მარტივი ელემენტური წრეწებები**

**დავამტკიცოდ ანალიზურად.**

- ინდუქციური წინაღობისათვის  $i = I_m \sin \omega t$ , მაშინ კოჭაზე მოდებული ძაბვა ტოლი იქნება

$$u_L = L \frac{di}{dt} = LI_m \omega \cos \omega t = \omega LI_m \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}),$$

ანუ ძაბვა უსწრებს დენს  $90^\circ$  გრადუსით.

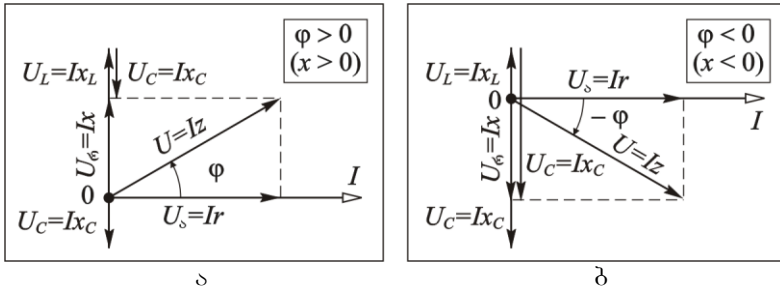
- ტევადური წინაღობისათვის  $u_C = U_m \sin \omega t$ , მაშინ კონდენსატორში გამავალი დენი ტოლი იქნება

$$i_C = C \frac{du}{dt} = CU_m \omega \cos \omega t = \omega CU_m \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

ანუ დენი უსწრებს ძაბვას  $90^\circ$  გრადუსით.

\*\*  $u_L$  და  $u_C$  ძაბვები ერთმანეთის მიმართ საპირისპიროდ არიან მიმართული და შეადგენენ  $180^\circ$  გრადუსს. ეს გარემოება გამოიყენება დენის და ძაბვის რეზონანსულ წრედებში (იხ. თავი V).

განვიხილოთ წრედი ნახ. 3.3. მის მომჭერებზე მოდებული ძაბვა შეიძლება დავშალოთ მდგენელებად ნახ. 3.4.:  $U_s = Ir -$



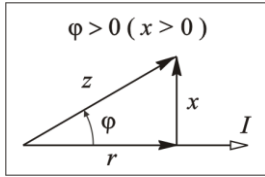
ნახ. 3.4.

აქტიური, მისი ფაზა ემთხვევა დენის ფაზას და  $U_6$  - რეაქტიული ძაბვის ვექტორი უსწრებს დენს  $90^\circ$  გრადუსით იმ შემთხვევაში, თუ წრედის ინდუქციური წინაღობა მეტია ტევადურ წინაღობაზე (იხ. ნახ. 3.4.ა), ხოლო თუ ნაკლებია მასზე, მაშინ ჩამორჩება  $90^\circ$  გრადუსით (იხ. ნახ. 3.4.ბ):

$$\begin{aligned} U_s &= Ir = U \cos \varphi; \\ U_6 &= Ix = U \sin \varphi; \\ U &= \sqrt{U_s^2 + U_6^2} = Iz. \end{aligned}$$

ანალოგიურად შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ წინაღობების და დენების სამკუთხედები, რომლებიც გაგვიადვილებენ აქტიური და რეაქტიული პარამეტრების მდგენელების დადგენას.

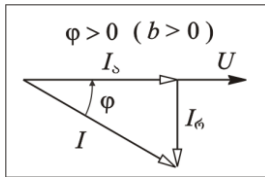
წინააღმდეგობის სამკუთხედიდან (ნახ.3.5.) გამომდინარეობს თანაფარდობები



ნახ. 3.5.

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{r}{z}; \\ \sin \varphi &= \frac{x}{z}; \\ \operatorname{tg} \varphi &= \frac{x}{r}. \end{aligned}$$

დენების სამკუთხედიდან (ნახ.3.6.) გამომდინარეობს თანაფარდობები

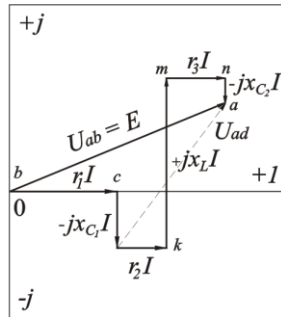
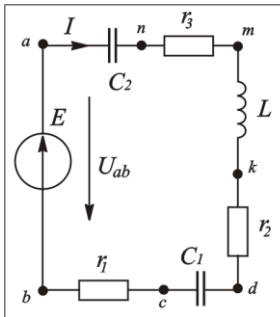


ნახ. 3.6.

$$\begin{aligned} I_{\delta} &= I \cos \varphi; \\ I_{\phi} &= I \sin \varphi; \\ I &= \sqrt{I_{\delta}^2 + I_{\phi}^2}. \end{aligned}$$

### 3.6. ტოპოგრაფიული დიაგრამები

ცვლადი დენის წრედის ელემენტების შეერთების წერტილების პოტენციალები წარმოადგენენ კომპლექსურ სიდიდეებს. ამ წერტილების ასახვისას კომპლექსურ სიბრტყეზე გამოიყენება



ა

ბ

ნახ. 3.7.

ე.წ. ტოპოგრაფიული დიაგრამები, რომლებიც ამარტივებენ წერტილების კომპლექსური პოტენციალების გაანგარიშებას.

ტოპოგრაფიული დიაგრამის ასაგებად ერთ-ერთი წერტილის პოტენციალს მიიჩნევენ ნულის ტოლად და მის მიმართ აწარმოებენ კონტურის შემოვლას.

განვიხილოთ ნახ. 3.7. მოყვანილი ელექტრული სქემა (ა) და მისი ტოპოგრაფიული დიაგრამა (ბ). საწყის ანუ ნულოვან წერტილად აღებულია წერტილი *b*. ამ წერტილიდან მიმდევრობით ვუვლით წრედში შემავალ ყველა ელემენტს და მიღებული მნიშვნელობების შესაბამისად კომპლექსურ სიბრტყეზე დაგვაქვს შესაბამისი წერტილები. დიაგრამის შედგენის შემდეგ შესაძლებელია ვიპოვოთ ნებისმიერ ორ წერტილს შორის პოტენციალთა სხვაობა და რა სახის დატვირთასთან გვაქვს საქმე, რაც მნიშვნელოვან როლს თამაშობს ელექტრული სქემის ანალიზისათვის.

**3.7. აქტიური, რეაქტიული, სრული სიმძლავრეები და სიმძლავრეების ბალანსი**

მიღებულია შემდეგი აღნიშვნები: აქტიური სიმძლავრე *P*, რეაქტიული სიმძლავრე *Q* და სრული სიმძლავრე *S*. სიმძლავრეების გამოსაანგარიშებელი გამოსახულებებია:

$$P = I^2 r = \frac{U^2}{r} = UI \cos \varphi;$$

$$Q = I^2 x = \frac{U^2}{x} = UI \sin \varphi;$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = UI = I^2 z = \frac{U^2}{z}.$$

ნებისმიერი ელექტრული წრედისათვის ჭეშმარიტია შემდეგი სიმძლავრეების ბალანსი:

$$\sum P_{\text{წყაროების}} = \sum P_{\text{მომხმარებლების}};$$

$$\sum Q_{\text{წყაროების}} = \sum Q_{\text{მომხმარებლების}}.$$