

**თავი 2. მუდმივი დენის რთული წრედების
ბანანბარიშების მეთოდები**

ქვემოთ მოყვანილი მუდმივი დენის რთული წრედების (წრედი შედგება $N_{\text{შ}}$ შტოებიდან, აქვს $N_{\text{კ}}$ კვანძი და $N_{\text{დ}}$ დენის წყარო) გამოთვლის მეთოდების ფორმულები გამოიყენება მაშინაც, როცა წრედი შეიცავს ძაბვის და დენის წყაროებს. მეთოდების გამოყენება შეიძლება იმ კერძო შემთხვევებშიც კი, როცა წრედი შეიცავს მხოლოდ ძაბვის ან დენის წყაროებს.

რთულ წრედში საძიებელი დენების რიცხვი, როგორც წესია, ემთხვევა შტოების რიცხვს. მათ დასაადგენად ძირითადად იყენებენ ომის და კირხჰოფის კანონებს.

რთული წრედების მეთოდების დიდი რაოდენობა განპირობებულია ურთიერთდამოუკიდებელი განტოლებების შედგენის ოდენობით. რაც ნაკლები შედგენილი განტოლებით და მარტივად შესაძლებელია ამოიხსნას დასმული ამოცანა, მით უფრო მისაღებია მეთოდი.

2.1. კირხჰოფის კანონების გამოყენების მეთოდი

პირველ რიგში დგინდება უცნობი დენების რიცხვი, რომელიც ტოლია $N_{\text{შ}} - N_{\text{დ}}$. თითოეული შტოსათვის ირჩევა დადებითი მიმართულება.

კირხჰოფის პირველი კანონის გამოყენებით შედგენილი ურთიერთდამოუკიდებელი განტოლებების რიცხვი კვანძების რიცხვზე ერთით ნაკლებია ($N_{\text{კ}} - 1$). (ბოლო კვანძის განტოლებები გამომდინარეობს წინა შედგენილი განტოლებების ალგებრული ჯამიდან, ამიტომ მისი შედგენა კარგავს აზრს).

კირხჰოფის მეორე კანონის გამოყენებით შედგენილი ურთიერთდამოუკიდებელი განტოლებების რიცხვი უდრის

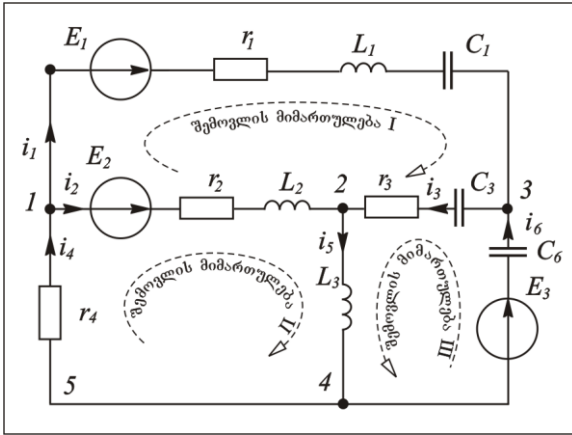
$$K = N_{\text{შ}} - (N_{\text{კ}} - 1) - N_{\text{დ}} . \quad (2.1)$$

განტოლების შედგენისას კირხჰოფის მეორე კანონით ასარჩევია დამოუკიდებელი კონტურები, რომლებიც არ შეიცავენ დენის წყაროებს.

კირხჰოფის პირველი და მეორე კანონებით შედგენილი განტოლებების საერთო რაოდენობა უდრის ($N_{\text{შ}} - N_{\text{დ}}$) უცნობი დენების რიცხვს.

განვიხილოდ მაგალითი (იხ. ნახ. 2.1) . წრედი შეიცავს $N_{\text{შ}} = 6$ შტოს და $N_{\text{კ}} = 4$ კვანძს. ვინაიდან ურთიერთდამოუკიდებელი კვანძების რიცხვი ($N_{\text{კ}} - 1$) = 4 - 1 = 3 , ხოლო კონტურების

რიცხვი $K = N_{\text{უ}} - (N_{\text{კ}} - 1) - N_{\text{ღ}} = 6 - (4 - 1) = 3$, მაშინ შედგება სულ ექვსი განტოლება.



ნახ. 2.1

ვინაიდან ის გამომდინარეობს პირველი სამი განტოლების შეკრებით და ამიტომ მისი დაწერა ზედმეტია.

კონტურების შემოვლის მიმართულების გათვალისწინებით კირხჰოფის მეორე კანონის გამოყენებით მივიღებთ;

$$\begin{cases} r_1 \cdot i_1 + L_1 \cdot \frac{di_1}{dt} + \frac{1}{C_1} \cdot \int i_1 dt + \frac{1}{C_3} \cdot \int i_3 dt + r_3 \cdot i_3 - L_2 \cdot \frac{di_2}{dt} - r_2 \cdot i_2 = E_1 - E_2 \\ r_2 \cdot i_2 + L_2 \cdot \frac{di_2}{dt} + L_3 \cdot \frac{di_5}{dt} + r_4 \cdot i_4 = E_2; \\ \frac{1}{C_3} \cdot \int i_3 dt + r_3 \cdot i_3 + L_3 \cdot \frac{di_5}{dt} + \frac{1}{C_6} \cdot \int i_6 dt = E_3. \end{cases}$$

ასეთი სახით ჩაწერილი ექვი განტოლებიდან შედგენილ განტოლებათა სისტემის ამოხსნა (მათ შორის სამი დიფერენციალური განტოლება) რთულია.

ამ სისტემის გამარტივება შესაძლებელია კომპლექსური აღრიცხვის და შესაბამისი სიდიდეების აღნიშვნების შემოტანით [1].

კირხჰოფის პირველი კანონის გამოყენებით პირველი სამი კვანძისათვის მივიღებთ სამ განტოლებას:

$$\begin{cases} i_1 + i_2 - i_4 = 0; \\ -i_2 - i_3 + i_5 = 0; \\ -i_1 + i_3 - i_6 = 0. \end{cases}$$

როგორც ავღნიშნეთ ზემოთ, კვანძი 4-ისთვის განტოლებას არ ვაღგენთ,

2.2. მატხველის კონტურული დენების მეთოდი

კონტურული დენების მეთოდი იძლევა საშუალებას შევამო-
ცოროთ განტოლებების რაოდენობა და დავიყვანოთ K რიცხ-
ვამდე, რომელიც განისაძვრება ფორმულით (2.1).

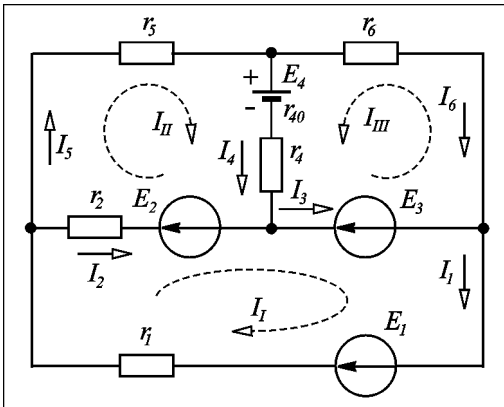
უნდა აღინიშნოს, რომ კონტურული დენები პირობითად შე-
მოტანილი სიდიდეებია და ამიტომ რეალურად არ არსებობენ!

მეთოდის აზრი ემყარება იმ თვისებას, რომ დენი ნებისმიერ
შტოში განისაზღვრება დამოკიდებელი კონტურული დენების
აღგებრული ჯამით.

თეორიიდან ცნობილია, რომ დამოუკიდებელი კონტურული
დენების საერთო რაოდენობა განისაზღვრება გამოსახულებით
 $N_{\text{კ}} - N_{\text{ძ}} + 1$ ან რაც იგივეა $N_{\text{კ}} - (N_{\text{ძ}} - 1)$.

განტოლებების შედგენამდე უნდა ჩატარდეს შემდეგი მოქმე-
დებები:

- ნებისმიერად ამოირჩიეთ და აღნიშნეთ დამოუკიდებელი
კონტურული დენები და მიმართულებები (გახსოვდეთ, რომ
წრედის ნებისმიერ შტოში უნდა გაიაროს ერთმა კონტურული
დენმა მაინც);
- სასურველია, რომ იმ კონტურული დენის მიმართულება, რომელიც
გადის დენის წყაროზე, ემთხვეოდეს დენის წყაროს
დენის მიმართულებას;
- რეკომენდაციის სახით: ელექტრული წრედის დენის თითო-
ეულ წყაროზე (მათი რაოდენობა კი შეადგენს $N_{\text{ღ}}$) უნდა



ნახ. 2.2.

გადიოდეს ერთი
მა-ინც დამოუკიდე-
ბელი კონტურული
დენი;

- დანარჩენი კონტურული დენები უნდა
გადიოდეს
შტოებზე, რომლებიც არ შეიცავენ
დენის წყაროებს;
- კირხჰოფის მეორე კანონის გამოყენებით შეადგინეთ
განტოლებათა სისტემა.

განვიხილოთ მაგალითი ნახ.2.2. ავირჩიოთ შტოებში გამავალი დენების და კონტურული დენების (I_I, I_{II}, I_{III}) მიმართულე-ბები (ზემოთ მოყვანილი რეკომენდაციების გათვალისწინებით), როგორც ნაჩვენებია ნახაზზე.

*მიაქციეთ ყურადღება იმას, რომ დენის წყაროს შემცველ შტოში დენის მიმართულება არჩეულია (+ -დან \rightarrow -საკენ) და კონტურული დენების მიმართულებები ამ დენის მიმართულების თანხვედრითია. ეს ამარტივებს გამოთვლებს.

კირსჰოფის მეორე კანონის მიხედვით აღნიშნული კონტურებისთვის შევადგინოთ განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{cases} E_1 - E_2 - E_3 = (r_1 + r_2)I_I - r_2I_{II}; \\ E_2 - E_4 = (r_2 + r_5 + r_{40} + r_4)I_{II} + (r_{40} + r_4)I_{III} - r_2I_I; \\ -E_3 - E_4 = (r_6 + r_{40} + r_4)I_{III} + (r_{40} + r_4)I_{II}. \end{cases}$$

შემდეგ ჩავსვამთ მნიშვნელობებს და ამოვხსნით მიღებულ ალგებრულ განტოლებათა სისტემას.

2.3. კვანძური პოტენციალების მეთოდი

კვანძური პოტენციალების მეთოდი იძლევა საშუალებას შევამციროთ განტოლებების რაოდენობა და დავიყვანოთ $N_p - 1$ რიცხვამდე (კვანძების რიცხვი მინუს ერთი).

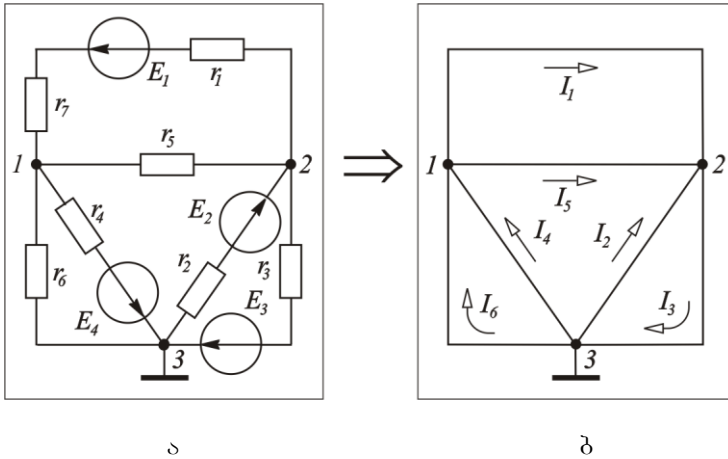
მეთოდის არსი მდგომარეობს იმაში, რომ ჯერ განსაზღვრავენ ყველა კვანძის პოტენციალებს, ხოლო კვანძებს შორის მოთავსებულ შტოებში გამავალ დენებს გამოითვლიან ომის კანონის გამოყენებით.

კვანძური ძაბვების მეთოდის გამოყენებისას უნდა ჩატარდეს შემდეგი მოქმედებები:

- ერთ-ერთი კვანძის პოტენციალს ვანიჭებთ ნულის ტოლ მნიშვნელობას;
- დანარჩენი $N_p - 1$ კვანძისათვის ომის კანონის გამოყენებით ვადგენენ განტოლებებს;
- თუ კვანძში შემავალი შტო (შტოები) შეიცავს დენის წყაროებს, მაშინ თუ დენი მიმართულია კვანძისაკენ, ის უარყოფითი ნიშნისაა, თუ გამოდის კვანძიდან - დადებითი ნიშნის.
- სხვა შტოების დენები ჩაიწერება კვანძებს შორის პოტენციალთა სხვაობის გამოსახულებების გამოყენების საშუალებით;

- თუ ელექტრული წრედი შეიცავს შტოებს, რომლებშიც არის ძაბვის წყარო და არ არის წინაღობა, მაშინ განტოლებათა რიცხვი მცირდება ასეთი ნულოვანი წინაღობების მქონე შტოების რიცხვით (N_f). ამ შემთხვევაში განტოლებათა რიცხვი შეადგენს $N_f - N_f - 1$.

მაგალითი: ნახ. 2.3.ა-ზე მოყვანილი სქემის მიხედვით განსაზღვრეთ თითოეულ შტოში გამავალი დენის მნიშვნელობები, თუ r -ის და E -ის ყველა მნიშვნელობები მოცემულია.



ნახ. 2.3.

ამოხსნა: წერტილი 3-ის პოტენციალი მივიღოთ ნულის ტოლად $\varphi_3=0$. შევადგინოთ განტოლებები კვანძური პოტენციალების მეთოდის გამოყენებით. კირხჰოფის პირველი კანონის თანახმად, შესაბამისად, 1-სა და მე-2 კვანძებში შემავალი და გამომავალი დენების მნიშვნელობათა ჯამი უდრის ნულს. ამიტომ ომის განზოგადებული კანონის გამოსახულების (1.1) გამოყენებით მივიღებთ:

$$\frac{\varphi_1 - \varphi_2 - E_1}{r_1 + r_7} + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{r_5} + \frac{\varphi_1 + E_4}{r_4} + \frac{\varphi_1}{r_6} = 0,$$

$$\text{ხოლო კვანძი 2-ის } \frac{\varphi_2 - \varphi_1 + E_1}{r_1 + r_7} + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{r_5} + \frac{\varphi_2 - E_2}{r_2} + \frac{\varphi_2 + E_3}{r_3} = 0.$$

ამ განტოლებებში ორი უცნობია (φ_1 და φ_2), მაშასადამე მათი პოვნა არ გაგვიჭირდება. ამის შემდეგ ვიპოვოთ დენები ცალკეული შტოებისათვის ომის კანონის გამოყენებით. დენების მიმართულებები მოყვანილია ნახ. 2.3.ბ-ის გრაფზე (წრედის გრა-

ფი არის ელექტრული სქემის ისეთი გამოსახულება, როდესაც ყველა შტოები შეცვლილია ხაზებით, ძაბვის წყაროები დამოკლებულია, ხოლო დენის წყაროები გართულია. გრაფში ინახება სქემის ყველა ტოტი და კვანძი).

2.4. ზედღების (სუპერპოზიციის) მეთოდი

თუ ელექტრულ წრედში მოცემული სიდიდეებია ძაბვის წყაროების ემძ-ები, დენის წყაროს დენები, მაშინ წრედის ნებისმიერ კონტურში (შტოში) I_i დენი, წრედში მოქმედი ემძ-ების ცალ-ცალკე, დამოკიდებელი მოქმედებით გამოწვეული შესაბამისი დენების ალგებრული ჯამის ტოლია ($I_i = I_{i1} + I_{i2} + \dots + I_{in}$).

მხედველობაში უნდა ვიქონიოთ, რომ როცა ვანგარიშობთ ერთი გენერატორის მოქმედებით აღძრულ დენებს, მაშინ სხვა ძაბვის წყაროები შეიცვლებიან მოკლედ ჩართული მონაკვეთებით (ძაბვის წყაროების შიდა წინაღობა უდრის ნულს $r_{\text{ინტ}}=0$, ამიტომ $E=0$), ხოლო სხვა დენის წყაროები გამოირთვებიან (დენის წყაროების შიდა წინაღობა უსასრულოდ დიდია, ამიტომ $I=0$). ამასთან სქემის გენერატორების წინაღობას ვინარჩუნებთ.

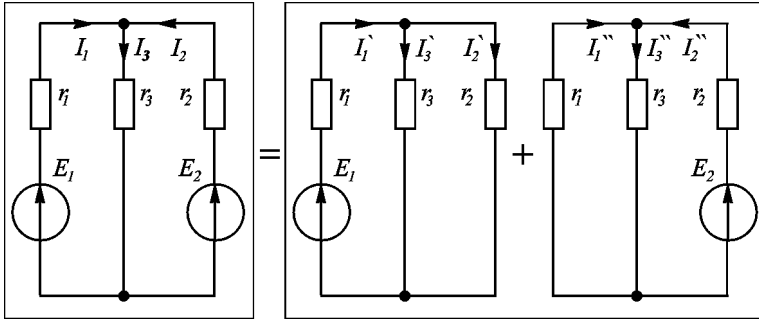
მეთოდის არსი მდგომარეობს შემდეგში:

- რთულ სქემას ვანაწევრებთ მარტივ სქემებად შემავალი ემძ-ის რაოდენობის მიხედვით;
- თითოეული დანაწევრებულიანი დამოუკიდებელ სქემისათვის შემოგვაქვს დენების მიმართულებები და ვანგარიშობთ ერთი დამოუკიდებელი ემძ-ით აღძრული დენების მნიშვნელობებს ყველა შტოში;
- საძიებელი დენების მისაღებად თითოეული შტოში ყველა მიღებულ დენის მნიშვნელობებს ალგებრულად ვკრებთ.

მაგალითი. ნახ. 2.4. -ზე მოყვანილია ელექტრული წრედის სქემა. ვიპოვოთ I_1, I_2 და I_3 დენები.

მოვახდინოთ მოყვანილი სქემის დანაწევრება ორ მარტივ სქემად, ვინაიდან სქემაში მხოლოდ ორი ე.მ.ძ.აა. მეთოდის მიხედვით თითოეული სქემის განგარიშებით შტოებში მიღებულ დენები უნდა შევკრიბოთ ალგებრულად ანუ მივიღებთ

$I_1 = I_1 + I_1'$; $I_2 = -I_2 + I_2'$; $I_3 = I_3 + I_3'$. ეს მეთოდი გამოიყენება მხოლოდ დენების და არა სიმძლავრის გამოსათვლელად, რომელიც შეიცავს კვადრატულ პარამეტრს ($P=r \cdot I^2$).



ნახ. 2.4.

2.5. ბარდაქმნის მეთოდი

გარდაქმნის ყველა შემთხვევისათვის ერთი სქემის ჩანაცვლება სხვა სქემით, ან მისი ექვივალენტურით არ უნდა იწვევდეს დენების ან ძაბვების შეცვლას იმ წრედის უბნებში, რომლებშიც გარდაქმნას ადგილი არ ჰქონდა.

მიმდევრობით შეერთებული წინაღობები შეიძლება შეიცვალოს მისი ექვივალენტური ერთი წინაღობით, რომელიც

$$r_{\text{მკ}} = \sum_{k=1}^n r_k$$

მიმდევრობითი შეერთება ნიშნავს, რომ ყველა წინაღობაში ერთი და იგივე დენი გადის.

პარალელურად შეერთებული წინაღობები შეიძლება შეიცვალოს მისი ექვივალენტური ერთი წინაღობით, რომელიც

$$\frac{1}{r_{\text{მკ}}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{r_k}$$

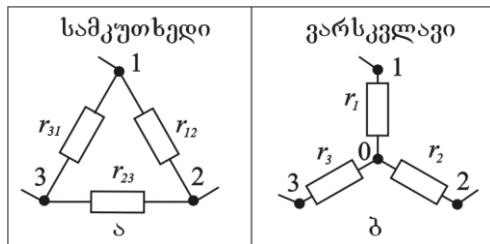
პარალელური შეერთება ნიშნავს, რომ ყველა წინაღობა მიერთებულია მხოლოდ ერთ წყვილ კვანძთან.

კერძო შემთხვევაში ორი წინაღობის ექვივალენტური წინაღობა გამოითვლება ფორმულით: $r_{\text{მკ}} = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}$.

შერეულად შეერთებული წინაღობების შეცვლა ექვივალენტური წინაღობით. (**შერეული შეერთება** ნიშნავს მიმდევრობითი და პარალელურად შეერთებული წინაღობების შეუღლებას).

სამკუთხედად შეერთებული წინაღობების პირდაპირ ვარსკლავურად შეერთებულ წინაღობებზე (იხ. ნახ. 2.5.) და შებრუნე-

ბულ გარდაქმნის ფორმულებს აქვს სახე, სადაც g შტოს გამტარობაა [2]:



ნახ. 2.5.

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= \frac{r_{12}r_{31}}{r_{12} + r_{23} + r_{31}}; \\ r_2 &= \frac{r_{23}r_{12}}{r_{12} + r_{23} + r_{31}}; \\ r_3 &= \frac{r_{31}r_{23}}{r_{12} + r_{23} + r_{31}}. \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} g_{12} &= \frac{g_1g_2}{g_1 + g_2 + g_3}; \\ g_{23} &= \frac{g_2g_3}{g_1 + g_2 + g_3}; \\ g_{31} &= \frac{g_3g_1}{g_1 + g_2 + g_3}. \end{aligned} \right\} \text{ან } \left. \begin{aligned} r_{12} &= r_1 + r_2 + \frac{r_1r_2}{r_3}; \\ r_{23} &= r_2 + r_3 + \frac{r_2r_3}{r_1}; \\ r_{31} &= r_3 + r_1 + \frac{r_3r_1}{r_2}. \end{aligned} \right\}$$

2.6. ექვივალენტური გენერატორის მეთოდი

ექვივალენტური გენერატორის მეთოდის გამოყენებით წრედის ნებისმიერ ab შტოში I დენის მნიშვნელობის დასადგენად განიხილავენ წრედის ნაწილს, რომელიც მიერთებულია ამ შტოსთან, რაიმე ექვივალენტურული გენერატორის სახით E_δ ემძით და წინააღობით r_δ (ნახ. 2.6.ა) .

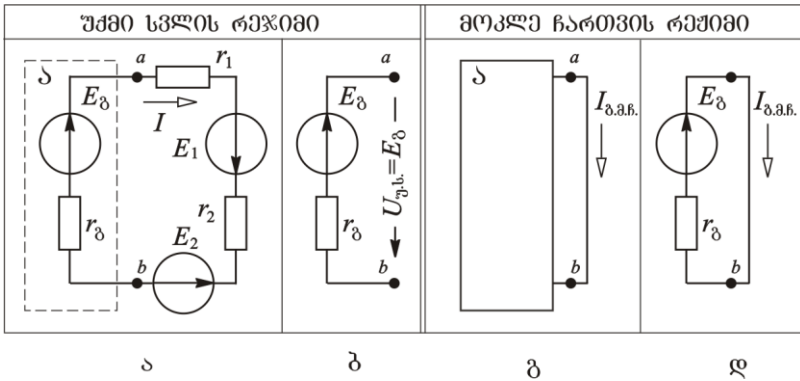
საძიებელ შტოში $r = r_1 + r_2$ და E_1 და E_2 ემძით დენი გამოითვლება ომის კანონის გამოყენებით: $I = \frac{E_\delta + E_1 - E_2}{r_\delta + r_1 + r_2}$.

ექვივალენტური გენერატორის ემძის E_δ გამოსათვლელად საკმარისია განვიხილოთ წრედი ab შტოს გარეშე (უქმი სვლის რეჟიმი ნახ. 2.6.ბ.) ამ შემთხვევაში $U_{\text{უ.ს.}} = E_\delta$.

თუ დავამოკლებთ ექვივალენტური გენერატორის a და b კვანძებს ნახ. 2.6.გ და 2.6.დ, მაშინ $r_\delta = \frac{E_\delta}{I_{\text{კ.მ.}}}$.

ვინაიდან ექვივალენტური გენერატორის ემძ განისაზღვრება

უქმი სვლის და მოკლედ ჩართვის რეჟიმებში, ამიტომ ზოგჯერ მას უწოდებენ უქმი სვლის და მოკლედ ჩართვის მეთოდს.

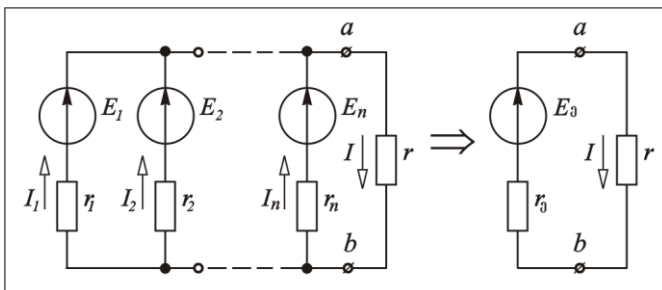


ნახ. 2.6.

2.7. ჩანაცვლების მეთოდები

2.7.1. რამდენიმე პარალელური ძაბვის გენერატორის ერთი ექვივალენტურით ჩანაცვლების მეთოდი

თუ გვაქვს რამდენიმე პარალელურად მომუშავე და ერთ დატვირთვის r წინააღობაზე ჩართული ძაბვის გენერატორები E_1, E_2, \dots, E_n ემძით და r_1, r_2, \dots, r_n შიდა წინააღობებით, მაშინ ისინი შეგვიძლია შევცვალოთ ერთი ექვივალენტური გენერატორით E_0 ემძით და r_0 შიდა წინააღობით. ამასთან



ნახ. 2.7.

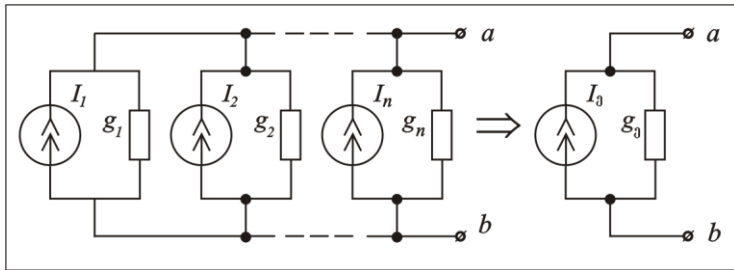
$$E_{\text{ფ}} = \frac{\sum_{k=1}^n E_k g_k}{\sum_{k=1}^n g_k}; \quad g_k = \frac{1}{r_k}; \quad \frac{1}{r_{\text{ფ}}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{r_k}.$$

დენი დატვირთვის r წინაღობაში $I = \frac{E_{\text{ფ}}}{r + r_{\text{ფ}}}$, ხოლო თითო-

ეულ ტოტში დენი $I_k = \frac{E_k - U}{r_k}$, სადაც $U = U_{ab} = Ir$.

2.7.2. რამდენიმე პარალელური დენის გენერატორის ერთი ექვივალენტურით ჩანაცვლების მეთოდი

თუ გვაქვს რამდენიმე პარალელურად მომუშავე და ერთ დატვირთვის r წინაღობაზე ჩართული დენის გენერატორები I_1, I_2, \dots, I_n დენებით და g_1, g_2, \dots, g_n შიდა გამტარობებით, მაშინ ისინი შეგვიძლია შევცვალოთ ერთი ექვივალენტური დენის გენერატორით, რომლის დენი I უდრის დენების ალგებრულ ჯამს, ხოლო შიგა გამტარობა g ცალკეული გენერატო-



ნახ. 2.8.

რების გამტარობების ჯამს:

$$I = I_1 + I_2 + \dots + I_n = \sum_{k=1}^n I_k; \quad g = g_1 + g_2 + \dots + g_n = \sum_{k=1}^n g_k.$$

2.8. კომპენსაციის და ნაცვალგების პრინციპები

კომპენსაციის პრინციპები. ელექტრული წრედის ნებისმიერი წინაღობა შტოებში დენების გადანაწილების შეუცვლელად შეიძლება შეცვლილ იქნეს ემძ-ით, რომელიც რიცხობრივად შესაცვლელ წინაღობაზე ძაბვის ვარდნის ტოლია და მიმართულია დენის საპირისპიროდ.

ნაცვალგების პრინციპები. ხაზოვან ელექტრულ წრედში, რომელიც შედგება წინაღობებისაგან, ძაბვის და დენის წყაროებისაგან, შესაბამისი ურთიერთგამტარობები $g_{ik} = g_{ki}$ ტოლია.

ამ პრინციპიდან გამომდინარეობს: თუ რაიმე რთულ წრედში ემძ E იმყოფება ab ტოტში და აღძრავს I დენს იგივე წრედის სხვა cd ტოტში, მაშინ ამ ემძ-ის გატანისას cd ტოტში ის გამოიწვევს ab ტოტში იგივე I დენს.