თემა 7. ოპერატორული მეთოდი

განხილულ სპექტრალურ მეთოდთან მჭიდროდ დაკავშირებულია ფართოდ გავცელებული ოპერატორული მეთოდი, რომელიც ეფუძნება სისტემაში შესავალი და გამოსავალი სიგნალების წარმოდგენაზე ლაპლასის გარდაქმნების გამოყენებას.

7.1. დიფერენციალური განტოლებების ამოხსნა ოპერატორული მეთოდით

ლაპლასის გარდაქმნა არის მოქნილი და მძლავრი მეთოდი, რომელიც სტანდარტული პროცედურების ჩატარებით იძლევა საშუალებას ამოვხსნათ მუდმივი კოეფიციენტების შემცველი წრფივი დიფერენციალური განტოლებები. ზუსტად ამ თვისებამ განაპირობა მისი გამოყენება სამეცნიერო კვლევებში და საინჟინრო გამოთვლებში.

ვთქვათ დიფერენციალური განტოლება

$$a_n \frac{\mathrm{d}^n u_{\text{გამ}}}{\mathrm{d}t^n} + a_{n-1} \frac{\mathrm{d}^{n-1} u_{\text{გამ}}}{\mathrm{d}t^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{\mathrm{d}u_{\text{გამ}}}{\mathrm{d}t} + a_0 u_{\text{გამ}} = \\ = b_m \frac{\mathrm{d}^m u_{\text{შეს}}}{\mathrm{d}t^m} + b_{m-1} \frac{\mathrm{d}^{m-1} u_{\text{შეს}}}{\mathrm{d}t^{m-1}} + \ldots + b_1 \frac{\mathrm{d}u_{\text{შეს}}}{\mathrm{d}t} + b_0 u_{\text{შეს}} \qquad (1.71)$$

ადგენს შესაბამისობის კანონს წრფივი სტაციონარული სისტემის შესავალსა და გამოსასვლელს შორის. შემოვიტანოთ შეზღუდვები. დავუშვათ, რომ შესასვლელი სიგნალი $u_{\text{შეს}}(t) = 0$ როცა $t < 0$. რადიოტექნიკური ხელსაწყოების სპეციფიკიდან გამომდინარე საწყისი პირობები ავირჩიოთ ნულის ტოლად: $u_{\text{გამ}}(0) = u'_{\text{გამ}}(0) = \ldots = u^{(n-1)}_{\text{გამ}}(0) = 0$. ბოლოს, მივიღოთ, რომ შესასვლელი სიგნალების დასაშვები მნიშვნელობები არ შეიცავს ფუნქციებს, რომლებიც დროში ისე სწრაფად იზრდებიან, რომ მათვის ლაპლასის გარდაქმნა არ არსებობს. (მათემატიკურად ნულოვანი საწყისი პირობები ნიშნავს იმას, რომ შესასვლელი სიგნალის წარმოშობის მომენტამდე სისტემა არ შეიცავს დაგროვილ ენერგიას).

ორიგინალსა და გამოსახულებას შორის შესაბამისობის კანონი ავღნიშნოთ შემდეგნაირად: $u_{\text{შეს}}(t) \leftrightarrow U_{\text{შეს}}(p)$, $u_{\text{გამ}}(t) \leftrightarrow U_{\text{გამ}}(p)$. (1.71) განტოლების ორივე მხრიდან გამოვთვალოთ ლაპლასის გარდაქმნა, მივიღებთ (1.72):

$$(a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0) U_{\text{გამ}}(p) = (b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \ldots + b_1 p + b_0) U_{\text{შეს}}(p).$$

. მნიშვნელოვანი მახასიათებელი, რომელზეც აგებულია ოპერატორული მეთოდი, არის გამოსასვლელი სიგნალის გამოსახულების შეფარდება შესასვლელ სიგნალთან:

$$K(p) = \frac{U_{\text{გამ}}(p)}{U_{\text{შეს}}(p)}, \tag{1.73}$$

რომელსაც ეწოდება განსახილავი სისტემის **გადამცემი ფუნქცია** ან **გადაცემის ოპერატორული კოეფიციენტი.**

ფორმულა (1.72) შესაბამისად

$$K(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \ldots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0}, \tag{1.74}$$

თუ ეს ფუნქცია ცნობილია, მაშინ მოცემულ შესასვლელ ზემოქმედებაზე სისტემის გამოსავალი რეაქციის პოვნა იშლება სამ ეტაპად:

$$1.\ u_{\text{შეს}}(t) \doteq U_{\text{შეს}}(p),$$

$$2.\ U_{\text{გამ}}(p) = K(p) U_{\text{შეს}}(p),$$

$$3.\ U_{\text{გამ}}(p) \doteq u_{\text{გამ}}(t)$$

ტერმინი ”ოპერატორული მეთოდი” ისტორიულად მოდის **ხევისაიდის** ცნობილი ნაშრომებიდან. მან შემოგვთავაზა წრფივ ელექტრულ წრედებში დიფერენციალური განტოლებებით აღწერილი გარდამავალი პროცესების ამოხსნა სიმბოლური ხერხით. **ხევისაიდის მეთოდი** ეფუძნება სიმბოლურ ჩანაცვლებას - დიფერენცირების ოპერატორის $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$-ის კომპლექსურ რიცხვზე p-ზე ჩანაცვლებას.

7.2. გადაცემის ფუნქციის თვისებები

თუ შევადარებთ (1.74) და (1.41) ფორმულებს, დავრწმუნდებით, რომ ფუნქცია $K(p)$ არის რეზულტატი გადაცემის სიხშირული კოეფიციენტის $K(j\omega)$ ანალიტიკური გაგრძელებისა წარმოსახვითი $j\omega$ ღერძით მთელი კომპლექსური სიბრტყის $p = \sigma + j\omega$ სიხშირეების სიბრტყეზე. ფუნქცია $K(p)$ ანალიტიკურია მთელ p სიბრტყეზე, გარდა იმ ზღვრული რაოდენობის წერტილებისა $p_1, p_2, \ldots, p_n$ რომლებიც არიან ფორმულა (1.74)-ის მნიშვნელის ფესვები. ამ წერტილებს, ანუ განტოლების $a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0 = 0$ ფესვებს, უწოდებენ

გადამცემი ფუნქციის $K(p)$-ს **პოლუსებს**.

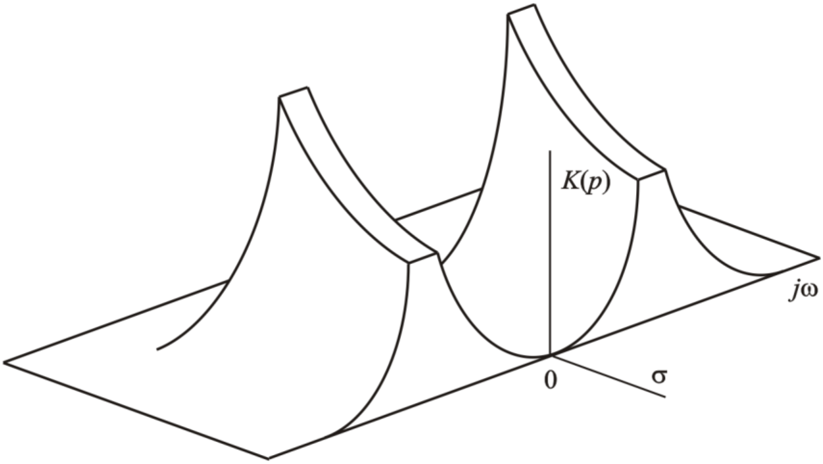
$z_1, z_2, ..., z_m$, წერტილებს რომლებიც წარმოადგენენ განტოლების $b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + ... + b_1 z + b_0 = 0$ ფესვებს, უწოდებენ მოცემული გადამცემი ფუნქციის **ნულებს.**

(1.74)-ის განტოლებაში, მრიცხველის გაყოფისას მნიშვნელზე, თუ გავიტანთ საერთო K_0 მამრავლს, მივიღებთ ეგრეთწოდებულ გადამცემი ფუნქციის **ნულ-პოლუსურ წარმოდგენას** :

$$K(p) = K_0 \cdot \frac{(p - z_1)(p - z_2)\cdots(p - z_m)}{(p - p_1)(p - p_2)\cdots(p - p_n)}. \qquad (1.75)$$

დიფერენციალური განტოლების (1.72) ნამდვილი კოეფიციენტები განაპირობებენ ნულების და პოლუსების შემდეგ თვისებას: ყველა ეს რიცხვები არიან ან ნამდვილნი ან ქმნიან კომპლექსურად შეუღლებელ წყვილებს.

ხშირად იყენებენ თვალსაჩინო ხერხს: გადამცემ ფუნქციას ასახავენ ნულების და პოლუსების რუქით, რომელზეც პირობითი ნიშნებით (∘-ნული, და ∗- პოლუსი) დატანილია აღნიშნული წერტილები. თვით $K(p)$ ფუნქცია, რომელიც იღებს კოპლექსურ მნიშვნელობებს, შეუძლებელია წარმოვიდგინოთ გრაფიკულად. ამიტომ იქცევიან შემდეგნაირად: დეკარტული სისტემის კოორდინატების სიბრტყის ზევით ასახავენ სამ განზომილებიანი $|K(p)|$ ფუნქციის ზედაპირს (ნახ. 7.1).



ნახ. 7.1

7.1 ნახ.-ზე მოყვანილია გადამცემი ფუნქციის $|K(p)|$ ზედაპირის ხასიათი, რომელსაც აქვს ორი კომლექსურ-შეუღლებული პოლუსი $p_{1,2}=-\alpha\pm j\omega_0$ და ერთი ნული $z=0$.

მიღებულ ზედაპირს აქვს "მთიანი ლანდშაფტის" მახასიათებელი სახე; უსასრულოდ მაღალი მწვერვალები შეესამაბება პოლუსებს, ხოლო ღრმულები - გადამცემი ფუნქციის **ნულებს**. თუ შევასრულებთ ამ ზედაპირის კვეთას სიბრტყით, რომელიც შეიცავს როგორც ვერტიკალურ ღერძს, ასევე $j\omega$ ღერძს, მაშინ მივიღებთ სისტემის **ასმ**-ის პროფილს.

წრფივი სისტემის გადამცემი ფუნქციის **პოლუსები წარმოადგენენ** მახასიათებელი განტოლების (1.36) ფესვებს. ამიტომ სისტემის მდგრადობისათვის **აუცილებელია და საკმარისი**, რომ ეს **პოლუსები** განლაგდნენ მკაცრად კომპლექსური p ცვლადის მარცხენა ნახევარსიბრტყეში. საერთო შემთხვევაში გადამცემი ფუნქციის **ნულები** შეიძლება განლაგდნენ როგორც მარცხენა, ასევე მარჯვენა ნახევარსიბრტყეებში.

7.3. ფუნქციის შებრუნება

წრფივ სტაციონარულ სისტემაში სიგნალის გასვლის ოპერატორული მეთოდით ამოცანის ამოხსნის დამაგვირგვინებელ ეტაპს წარმოადგენს ორიგინალის პოვნა, რომელიც შეესაბამება გამოსახულებას $U_{გამ}(p)=K(p)U_{შეს}(p)$.

განვიხილოთ კერძო შემთხვევა, როცა ფუნქცია წარმოადგენს ორი კომპლექსური სიხშირის ხარისხების მქონე მრავალწევრების ფარდობას: $U_{გამ}(p)=M(p)/N(p)$, ამასთან ჩავთვალოთ, რომ მრიცხველის ხარისხი m არ აღემატება მნიშვნელის n ხარისხს, და ამის გარდა, მნიშვნელის ფესვები p_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ მარტივია.

ორიგინალის პოვნის ხერხი, რომელიც პასუხობს ასეთ გამოსახულებას, ეფუძნება $U_{გამ}(p)$ ფუნქციის წარმოდგენას ელემენტარული წილადების სახით: $U_{გამ}(p)=\sum_{i=1}^{n}\frac{C_i}{p-p_i}$.

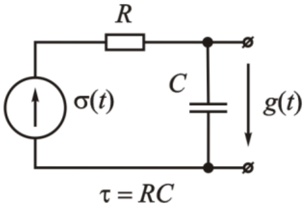
C_i კოეფიციენტები არიან $U_{გამ}(p)$ **ფუნქციის ნაშთები** პოლუსების წერტილებში, ამიტომ $U_{გამ}(p)=\sum_{i=1}^{n}\frac{M(p_i)}{N'(p_i)(p-p_i)}$.

როგორც ცნობილია, $\dfrac{1}{(p-p_i)}$ გამოსახულებას შეესაბამება $\exp\left(p_i t\right)$ ორიგინალი. მაშასადამე, მივდივართ ცნობილ ***შებრუნების ფორმულამდე***: $U_{გამ}(p)=\sum_{i=1}^{n}\dfrac{M(p_i)}{N'(p_i)}\exp(p_i t)$. (1.76)

7.4. გამოსასვლელი სიგნალების პოვნის მაგალითები ოპერატორული მეთოდით

ოპერატორული მეთოდის პრაქტიკული გამოყენებისას ფორმალური გამოთვლების უდიდესი ნაწილი გამოირიცხება, თუ გამოვიყენებთ ფართოდ გავრცელებულ **ლაპლასის** გარდამქმნების ცხრილებს.

მაგალითი 1.17. იპოვეთ RC წრედის (ნახ. 7.2) გარდამავალი მახასიათებელი.



ნახ. 7.2

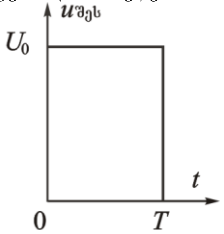
ამოხსნა: აქ $\sigma\left(t\right)\leftrightarrow\dfrac{1}{p}$, $K\left(p\right)=\dfrac{1}{1+p\tau}$, ამიტომ $U_{გამ}(p)=\dfrac{1}{p\left(1+p\tau\right)}$. ამ ფუნქციის ელემენტარულ წილადებად დაშლისას, მივიღებთ $U_{გამ}(p)=\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{\left(p+1/\tau\right)}$.

ბოლო ფორმულის მარჯვენა მხარის ორივე შესაკრები ორიგინალები კარგად არის ცნობილი. საძიებელი გარდამავალი მახასიათებელს აქვს სახე $g\left(t\right)=\left(1-e^{-t/\tau}\right)\sigma\left(t\right)$.

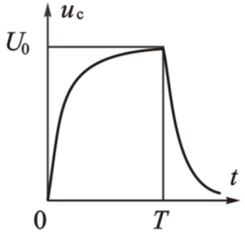
მაგალითი 1.18*. RC წრედის (ნახ. 7.2) შესასვლელზე მოქმედებს მართკუთხა ფორმის ემძ-ის ვიდეოიმპულსი T ხანგძლიობით და U_0 ამპლიტუდით (იხ. ნახ. 7.3). გამომავალ სიგნალს წარმოადგენს ძაბვა წრედის კონდენსატორზე. იპოვეთ ფუნქციია, რომელიც აღწერს $u_c\left(t\right)$ ძაბვის ცვლილებას დროში.*

ამოხსნა: *შესასვლელ სიგნალს აქვს გამოსახულება $U_{შეს}\left(p\right)=\dfrac{U_0}{p}\left(1-e^{-pT}\right)$. ამ გამოსახულებაში $exp\left(-pT\right)$ არსებობა ადასტურებს, რომ გამოსასვლელი სიგნალი წაინაცვლებს დროში T*

სიდიდით. ამიტომ, მაგალითი 1.17-ში მიღებული რეზულტატის გამოყენებით, შეგვიძლია ჩავწეროთ

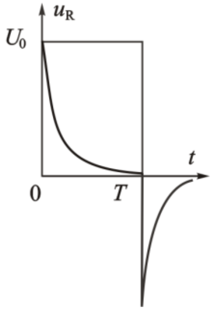


ნახ. 7.3



ნახ. 7.4

$$u_C(t)=U_0\left[1-e^{-t/\tau}\right]\sigma(t)-U_0\left[1-e^{-(t-T)/\tau}\right]\sigma(t-T).$$



ნახ. 7.5

წარმოსახვითისათვის ბოლო ფორმულა მიზანშეწონილია წარმოვიდგინოთ შემდეგი სახით:

$$u_C(t)=\begin{cases} U_0\left(1-e^{-t/\tau}\right) & \text{როცა } 0\le t\le T \\ U_0 e^{-t/\tau}\left(e^{T/\tau}-1\right) & \text{როცა } \quad t>T \end{cases}.$$

იგივე R და C პარამეტრებისას, თუ გამოსასვლელი მახასიათებელი მოიხსნება რეზისტორის მომჭერებიდან, მაშინ ძაბვა რეზისტორზე იქნება $u_R=u_{შეს}-u_C$ (ნახ. 7.5).

მაგალითი 1.19. პარალელური რხევითი კონტურის იმპულსური მახასიათებელი.

იმპულსური მახასიათებლის დადგენა. დანაკარგებიანი პარალელური რხევითი კონტურის აღიგზნება დენის დელტა-იმპულსით წრედის განუშტოებელ ნაწილში. გამოსავალ სიგნალს წარმოადგენს ძაბვა კონტურში. ტოლობა $U(p)=Z(p)I(p)$ მიუთითებს იმაზე, რომ ამ შემთხვევაში გადამცემი ფუნქციის როლს ასრულებს კონტურის ოპერატორული წინაღობა

$$Z(p)=\frac{p/C}{p^2+2\alpha p+\omega_0^2}, \qquad (1.77)$$

სადაც $\alpha=\dfrac{1}{2RC};\quad \omega_0^2=\dfrac{1}{LC}$.

მოხერხებულია ფორმულა (1.77) წარმოვიდგინოთ შემდეგი სახით

$$Z(p)=\frac{p/C}{(p+\alpha)^2+\omega_c^2} \qquad (1.78)$$

სადაც $\omega_c=\sqrt{\omega_0^2-\alpha^2}$ *- დანაკარგების მქონე კონტურის საკუთარი რხევების სიხშირეა.*

დენის დელტა-იმპულსის გამოსახულება არის ერთი, ამიტომ ამ სისტემის იმპულსური მახასიათებელი არის ორიგინალი, რომელიც შეესაბამება (1.78) *გამოსახულებას. ლაპლასის გარდამქმნების ცხრილიდან ვპოულობთ*

$$h(t)=\frac{e^{-\alpha t}}{C}\left(\cos\omega_c t-\frac{\alpha}{\omega_c}\sin\omega_c t\right). \qquad (1.79)$$

თუ კონტური მაღალვარგისობიანია $(\alpha \ll \omega_0)$, *მაშინ ფორმულა* (1.79) *ოდნავ გამარტივდება*

$$h(t)\approx\frac{e^{-\alpha t}}{C}\cos\omega_0 t. \qquad (1.80)$$

აუცილებელია გვახსოვდეს, რომ ფორმულები (1.79) *და* (1.80) *შეესაბამება კონტურის* ***აღგზნებას დენის უსასრულოდ მოკლე იმპულსით,*** *რომლის ფართობი ამისდა მიუხედავად შეადგენს* 1ა×წმ. *რეალურ მასშტაბში – ეს ძალზე დიდი სიდიდეა: მართკუთხა იმპულსს* 1 მკწმ *ხანგძლივობით უნდა ჰქონდეს გიგანტური ამპლიტუდა* 10^6 ა! *არ არის გასაკვირი, რომ როცა* $C=1000$ პკფ, *დასაწყის მომენტში ასეთი იმპულსი გამოიწვევს* 10^6 ვ *ძაბვას. რეალურ დენის იმპულსს ამპლიტუდით* 0,01 ა *და* 1 მკწმ *ხანგძლივობით აქვს ფართობი* 10^{-8} ა×წმ; *როცა* $C=1000$ პკფ კონტურის საწყისი ძაბვა შეადგენს 10 ვ.

ამრიგად, როცა $t>0$, ძაბვას პარალელურ კონტურში, რომელიც აღიგზნება $S_{\text{იმპ}}$ ფართობის მქონე ნებისმიერი ფორმის დენის მოკლე იმპულსით, აქვს სახე

$$u(t)=\frac{S_{\text{იმპ}}e^{-\alpha t}}{C}\left(\cos\omega_c t-\frac{\alpha}{\omega_c}\sin\omega_c t\right). \qquad (1.81)$$