# თავი 4. სპექტრალური ანალიზი

წრფივ სტაციონარულ სისტემებში რადიოტექნიკური სიგნალების გატარების ანალიზის სპექტრალურ მეთოდზე საუბრისას,ჩვეულებრივ მხედველობაში აქვთ მათემატიკური მეთოდების მთელი კომპლექსი, რომელსაც საფუძვლად უდევს სისტემის გადაცემის სიხშირული კოეფიციენტის თვისებების გამოყენება. ქვემოთ კონკრეტულ მაგალითებზე ნაჩვენებია სპექტრალური მეთოდის გამოყენება როგორც სისტემის რეაქციის პოვნის ამოცანაში, ასევე გამოსასვლელი სიგნალის რიცხვითი შეფასების პრობლემაში.

## 4.1. ძირითადი ფორმულა

ვთქვათ რაიმე წრფივი სტაციონარული სისტემის შესასვლელზე მოქმედებს დეტერმინირებული სიგნალი $u_{შეს}(t)$, რომელიც მოცემულია ფურიეს უკუ გარდაქმნით

$$u_{შეს}(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}U_{შეს}(\omega)e^{j\omega t}d\omega .$$

ვივარაუდოთ, რომ სისტემის გადაცემის სიხშირული კოეფიციენტი $K(j\omega)$ ცნობილია. როგორც დამტკიცებულ იქნა, $\exp(j\omega t)$ სახის კომპლექსური სიგნალი წარმოადგენს რა სისტემური ოპერატორის საკუთარ ფუნქციას, გამოსასვლელზე ქმნის ელემენტარულ რეაქციას $K(j\omega)\exp(j\omega t)$. ამ რეაქციების ჯამით ვპოულობთ გამოსასვლელი სიგნალის გამოსახულებას:

$$u_{გამ}(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}K(j\omega)U_{შეს}(\omega)e^{j\omega t}d\omega \qquad (1.48)$$

მიღებულია სპექტრალური მეთოდის ძირითადი ფორმულა, რომელიც ამოწმებს იმას, რომ სისტემის გადაცემის სიხშირული კოეფიციენტი ასრულებს შესასვლელსა და გამოსასვლელზე სიგნალების სპექტრალურ სიმკვრივეებს შორის პროპორციულობის მამრავლის როლს:

$$U_{გამ}(\omega)=K(j\omega)U_{შეს}(\omega). \qquad (1.49)$$

ამრიგად, სიხშირულ არეში სისტემების ანალიზი გამოირჩევა შესანიშნავი თვისებით – სიგნალის გარდაქმნის ეფექტი სისტემაში აისახება უბრალოდ გამრავლების ალგებრული ოპერაციით.

მხედველობაში უნდა იქნეს მიღებული ის, რომ სპექტრალური და დროითი მიდგომები ერთმანეთის სავსებით ექვივალენტურია. მართლაც, **დუამელის ინტეგრალი** (1.8) არის

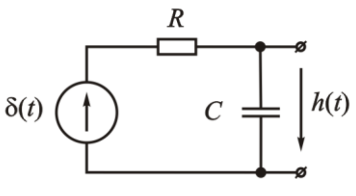
$u_{შეს}(t)$ ფუნქციისა და იმპულსური მახასიათებლის $h(t)$ ნახვევი დროით არეში $u_{გამ}(t)=u_{შეს}(t)*h(t)$. ე.ი. გამოსასვლელი სიგნალის სპექტრალური სიმკვრივე არის $u_{შეს}(t)$ და $h(t)$ ფუნქციების სპექტრალური სიმკვრივეების ნამრავლი. აქედან უშუალოდ გამომდინარეობს ფორმულა (1.49).

გამოსასვლელი რეაქციის პოვნის სპექტრალური მეთოდის პრაქტიკული ღირებულება ყოველ კონკრეტულ შემთხვევაში დამოკიდებულია იმაზე, ხერხდება თუ არა ინტეგრირება ფორმულაში (1.8).

## 4.2. იმპულსური მახასიათებლების გამოთვლა

როგორც წესი, წრფივი სისტემების **გადაცემის სიხშირული კოეფიციენტის** პოვნა არ იწვევს პრინციპიალურ სირთულეებს. ამიტომ თუ მოითხოვება სისტემის იმპულსური მახასიათებლის $h(t)$ გამოთვლა, მიზანშეწონილია ვისარგებლოთ სპექტრალური მეთოდით, რომლის თანახმადაც $h(t)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}K(j\omega)e^{j\omega t}d\omega.$

მაგალითის სახით ვიპოვოთ $RC$ წრედის (იხ. ნახ. 4.1) იმპულსური მახასიათებელი, რომლისთვისაც გამოსასვლელ სიგნალს წარმოადგენს ძაბვა კონდენსატორზე. აქ




ნახ. 4.1

$K(j\omega)=\dfrac{1}{(1+j\omega RC)}$, ამიტომ იმპულსური მახასიათებელი

$$h(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{j\omega t}}{1+j\omega RC}d\omega \quad (1.50)$$

გამოვიყენოთ **ნაშთა მეთოდი** და ჩავთვალოთ, რომ $\omega$ კომპლექსური ცვლადია. ინტეგრირების კონტური (1.50)-ში შექმნილია მთელი ნამდვილი ღერძით $\mathrm{Im}=0$ და საკმაოდ დიდი რადიუსის მქონე $C_1$ რკალით, რომელიც შეიძლება შეიკრას როგორც ზედა, ასევე ქვედა ნახევარსიბრტყეებში.

ინტეგრალქვეშა ფუნქციას (1.50)-ში აქვს ერთადერთი მარტივი პოლუსი წერტილში კოორდინატით $\omega_з=\dfrac{j}{RC}$ (იხ. ნახ. 4.2ა) ამ წერტილში ინტეგრალქვეშა ფუნქციის ნაშთი

$$res(\frac{e^{j\omega t}}{1+j\omega RC})\Big|_{\omega=\omega_\pi}=\frac{e^{-\frac{t}{RC}}}{jRC}$$

როცა $t>0$ როცა $t<0$


ა ბ

ნახ. 4.2

ვიპოვოთ ფუნქცია $\boldsymbol{h(t)}$ როცა $\boldsymbol{t>0}$. ამისათვის მოვათავსოთ რკალი $C_1$ ზედა ნახევარსიბრტყეში, რადგან სწორედ ამ შემთხვევაში რკალის რადიუსის ზრდასთან ერთად ფუნქცია $\exp(j\omega t)$ ექსპონენციალურად მიისწრაფის ნულისაკენ. ზღვარში კონტურული ინტეგრალი ტოლი იქნება ინტეგრალის გამოთვლის მხოლოდ ნამდვილი ღერძის გასწვრივ (1.50) ფორმულის შესაბამისად. (*ამ შემთხვევაში ჩაკეტილი კონტურის შიგნით ინტერგაქვეშ მდგომ ფუნქციას გააჩნია ერთადერთი უბრალო პოლუსი*)

**კოშის თეორემის** თანახმად, კომპლექსური ცვლადის ფუნქციიდან კონტურული ინტეგრალი ტოლია $2\pi j$ რიცხვის, გამრავლებულს ყველა პოლუსში ინტეგრალქვეშა ნაშთების ჯამზე, რომლებიც მდებარეობენ ინტეგრირების კონტურის შიგნით. ამგვარად,

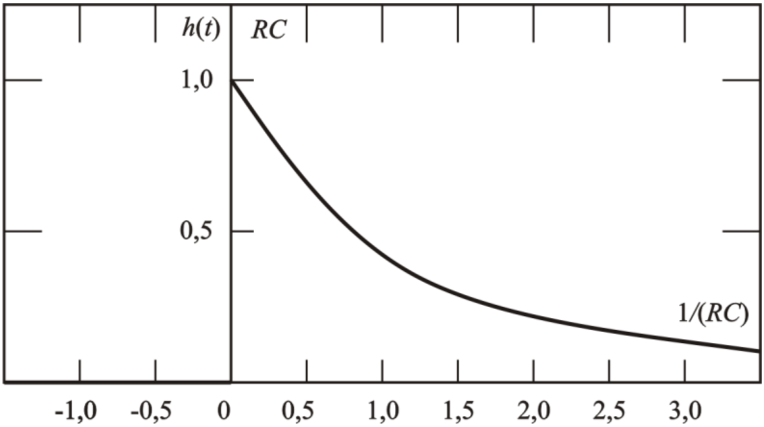
$$h(t)=\frac{1}{RC}e^{-\frac{t}{RC}} \qquad \text{როცა } t>0\,. \tag{1.51}$$

თუ მოითხოვება იმპულსური მახასიათებლის პოვნა, როცა $\boldsymbol{t<0}$ (იხ. ნახ. 4.2ბ), მაშინ ინტეგრების კონტური უნდა შეიკრას ქვედა ნახევარსიბრტყეში, სადაც ინტეგრალქვეშა ფუნქციას საერთოდ არა აქვს პოლუსები და ამიტომ

$$\boldsymbol{h(t)=0} \text{ როცა } \boldsymbol{t<0}\,. \tag{1.52}$$

$RC$-წრედის იმპულსური მახასიათებლის გრაფიკი, აგებული (1.51) და (1.52) ფორმულების მიხედვით წარმოადგენს მრუდს, გაწყვეტილს t=0 დროს (ნახ. 4.3.)

გაწყვეტილი ფუნქციების წარმოდგენა კონტურული ინტეგრალების საშუალებით წარმოადგენს მათემატიკურ ხერხს, რომლებიც ფართოდ გამოიყენება თეორიულ კვლევებში.

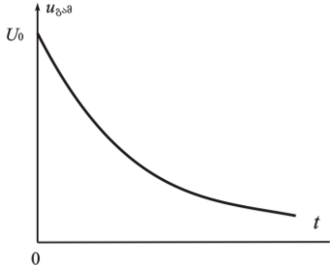



ნახ. 4.3

$RC$ -წრედის იმპულსური მახასიათებლის გრაფიკის სახე.

### 4.3. სიგნალის გამოთვლა სისტემის გამოსასვლელზე.

სპექტრალური მეთოდის გამოყენების მაგალითის სახით ამოვხსნათ ზემოთგანხილულ $RC$-წრედში ძაბვის ექსპონენციალური ვიდეოიმპულსის $u_{შეს}(t) = U_0 \exp(-\alpha t)\sigma(t)$ (იხ. ნახ. 4.4)




ნახ. 4.4

გასვლის ამოცანა.

მოცემულ შემთხვევაში შესასვლელი სიგნალის სპექტრალური სიმკვრივე $U_{შეს}(\omega) = \dfrac{U_0}{\alpha + j\omega}$ და ამოცანა დაიყვანება შემდეგ გამოსახულებაში შემავალი ინტეგრალის გამოთვლაზე

$$u_{გამ}(t) = \frac{U_0}{2\pi\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(j\omega t)d\omega}{(1 + j\omega/\alpha)(1 + j\omega RC)}$$

ელემენტარულ წილადებად ინტეგრალქვეშა ფუნქციის ალგებრული ნაწილის დაშლით, გვაქვს

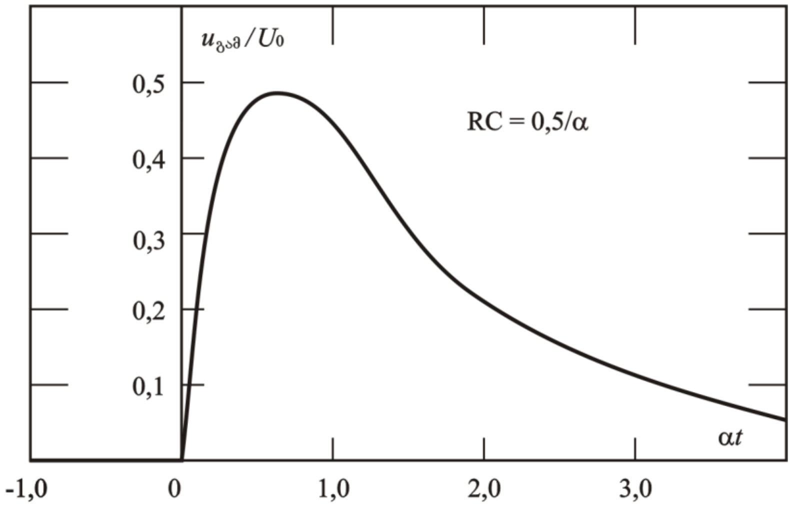
$$\frac{1}{(1+j\omega/\alpha)(1+j\omega RC)}=\frac{1}{1-\alpha RC}\cdot\left(\frac{1}{1+j\omega/\alpha}-\frac{\alpha RC}{1+j\omega RC}\right).$$

მრგვალ ფრჩხილებში მოთავსებულ შესაკრებთა სტრუქტურა საშუალებას გვაძლევს უშუალოდ გამოვიყენოთ $RC$-წრედის იმპულსური მახასიათებლის გამოთვლისას მიღებული შედეგი და ჩავწეროთ ამონახსნი როცა $t>0$:

$$u_{გამ}(t)=\frac{U_0}{1-\alpha RC}[\exp(-\alpha t)-\exp(-t/(RC))] \tag{1.53}$$

მართლაც, როცა $t<0$ $\qquad u_{გამ}(t)=0$. (1.54)

$RC$ წრედის გამოძახილის გრაფიკი ექსპონენციალური სახის ვიდეოიმპულზე მოყვანილია ნახ. 4.5-ზე




ნახ. 4.5

მიაქციეთ ყურადღება მასსზე, რომ $RC$ წრედი აგლუვებს შესასვლელ სიგნალს