თავი 3. წრფივი დინამიური სისტემები

წრფივი დინამიური სისტემები ეწოდება მოწყობილობებს, რომლებიც ხასიათდებიან შემდეგი თვისებებით: მათი გამომავალი სიგნალი განისაზღვრება არა მარტო შესასვლელი სიგნალის მნიშვნელობით დროის განხილულ მომენტში, არამედ ამ სიგნალის "წინაისტორიით". სხვანაირად თუ ვიტყვით, დინამიკურ სისტემას გააჩნია რაღაც სასრული ან უსასრულო "მეხსიერება", რომლის ხასიათზე დამოკიდებულია შესასვლელი სიგნალის გარდაქმნის თავისებურებანი.

3.1. სისტემები, რომლებიც აღიწერება დიფერენციალური განტოლებებით

ყველა შესაძლო დინამიკურ სისტემას შორის თეორიული რადიოტექნიკისათვის დიდი მნიშვნელობა აქვს მათ, რომლებიც აღიწერება დიფერენციალური ოპერატორებით. ზოგად შემთხვევაში საქმე ეხება ისეთ სისტემებს, რომელთათვისაც კავშირი ერთგანზომილებიან შესასვლელ და გამოსასვლელ სიგნალებს შორის მყარდება შემდეგი დიფერენციალური განტოლებებით:

$$\begin{gathered} a_n \frac{d^n u_{\text{გამ}}}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} u_{\text{გამ}}}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{du_{\text{გამ}}}{dt} + a_0 u_{\text{გამ}} = \\ b_m \frac{d^m u_{\text{შეს}}}{dt^m} + b_{n-1} \frac{d^{m-1} u_{\text{შეს}}}{dt^{m-1}} + \ldots + b_1 \frac{du_{\text{შეს}}}{dt} + b_0 u_{\text{შეს}} \end{gathered} \qquad (1.30)$$

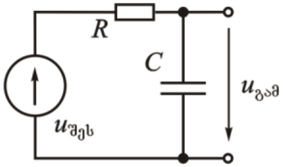
დავუშვათ, რომ მოცემულია შესასვლელი სიგნალი $u_{\text{შეს}}(t)$. მაშინ განტოლების მარჯვენა ნაწილი (1.30), რომელიც შეიძლება პირობითად ავღნიშნოთ $f(t)$, წარმოადგენს ცნობილ ფუნქციას. სისტემის ქცევის ანალიზი ამ დროს დაიყვანება მათემატიკაში კარგად შესწავლილ მუდმივ კოეფიციენტებიანი n-რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლების ამოხსნაზე:

$$a_n \frac{d^n u_{\text{გამ}}}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} u_{\text{გამ}}}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{du_{\text{გამ}}}{dt} + a_0 u_{\text{გამ}} = f(t) \qquad (1.31)$$

ამ განტოლების n რიგს მიღებულია ვუწოდოთ ***დინამიკური სისტემის რიგი.***

განვიხილოთ დინამიკური სისტემის და მათი შესაბამისი დიფერენციალური განტოლებების რამდენიმე მაგალითი.

მაგალითი 3.1. *მოცემულია* RC *სახის* Γ*-სებრი ოთხპოლუსას წრედი* (ნახ. 3.1), *რომელიც აღიგზნება შესასვლელის მხრიდან ე.მ.ძის* $u_{გამ}(t)$ *წყაროთი. გამოსასვლელი სიგნალი არის ძაბვა* $u_{გამ}$ *გამოსასვლელზე.*



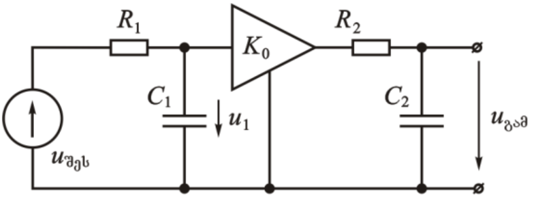
ნახ. 3.1

ამოხსნა. *ვინაიდან დენი წრედში* $i_C(t) = C\dfrac{du_{გამ}}{dt}$, *კირხჰოფის მეორე კანონის გამოყენებით ვღებულობთ დიფერენციალურ განტოლებას* $RC\dfrac{du_{გამ}}{dt} + u_{გამ} = u_{შეს}$. (1.32)

ამგვარად, RC წრედი წარმოადგენს 1-ლი რიგის დინამიკური სისტემის მაგალითს. ამ წრედის მნიშვნელოვანი პარამეტრია ***დროის მუდმივა*** $\tau = RC$, რომელიც განისაზღვრება სისტემაში პროცესების მიმდინარეობის მახასიათებელი დროითი მასშტაბით.

1-ლი რიგის დინამიკურ სისტემებს ასევე უწოდებენ **ინერციულ რგოლს**

მაგალითი 3.2. *მოცემულია შედარებით რთული სისტემა, შექმნილი ორი* RC*-წრედით, რომლებიც გაყოფილია* K_0 *გაძლიერების კოეფიციენტის მქონე იდეალური მაძლიერებლით* (ნახ. 3.2). *მაძლიერებლის შესასვლელი წინაღობა შეუზღუდავად დიდია, ხოლო გამოსასვლელი წინაღობა უსასრულოდ მცირე, ამიტომ მაძლიერებელი წარმოადგენს წრე დებს შორის განმხოლოების იდეალურ ელემენტს.*



ნახ. 3.2

ამოხსნა: *ორი დროის მუდმივას* $\tau_1 = R_1C_1$ *და* $\tau_2 = R_2C_2$ *შემოტანით წინა მაგალითის ანალოგიით გვაქვს 1-ლი რიგის შემდეგი დიფერენციალური განტოლებები:*

$$\tau_2\frac{du_{გამ}}{dt} + u_{გამ} = K_0u_1,$$

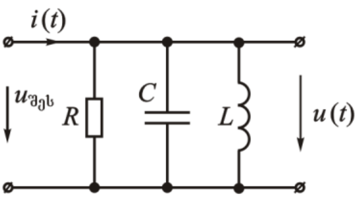
$$\tau_1\frac{du_1}{dt} + u_1 = u_{შეს}(t).$$

აქედან დამხმარე სიდიდის u_1 გამორიცხვით, მივიღებთ წრედის დიფერენციალურ განტოლებას:

$$\tau_1\tau_2\frac{d^2u_{\text{გამ}}}{dt^2}+(\tau_1+\tau_2)\frac{du_{\text{გამ}}}{dt}+u_{\text{გამ}}=K_0u_{\text{შეს}}. \qquad (1.33)$$

აქ განხილული უფრო რთული RC-წრედი აღმოჩნდება უკვე მე-2 რიგის სისტემა.

მაგალითი 3.3. *ვიპოვოთ პარალელური რხევითი კონტურის დიფერენციალური განტოლება დანაკარგებით, თუ ჩავთვლით, რომ შესასვლელ სიგნალს წარმოადგენს დენი $i(t)$, ხოლო გამოსასვლელ სიგნალს ძაბვა კონტურზე $u(t)$.*



ნახ.3.3

ამოხსნა: *დენების შეკრებით*

$$i_c=C\frac{du}{dt},\quad i_L=\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t}u\,d\xi,\quad i_R=\frac{u}{R}$$

ვღებულობთ განტოლებას

$$C\frac{du}{dt}+\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t}u\,d\xi+\frac{u}{R}=i,$$

რომელიც დროის მიხედვით ერთჯერადი დიფერენცირების გზით დაიყვანება სახემდე

$$\frac{d^2u}{dt^2}+2\alpha\frac{du}{dt}+\omega_0^2u=\frac{1}{C}\frac{di}{dt}, \qquad (1.34)$$

სადაც $\alpha=1/2(RC)$ - ***კონტურის მილევის კოეფიციენტია,*** *$\omega_0=1\sqrt{LC}$ უდანაკარგო კონტურში საკუთარი რხევების სიხშირეა.*

3.2. დინამიური სისტემების საკუთარი რხევები

იმისათვის, რომ სრულად განისაზღვროს დინამიკური სისტემის ქცევა, რომელიც აღიწერება განტოლებით, საჭიროა გავითვალისწინოთ საწყისი პირობები, რომლებიც ახასიათებენ სისტემის შიდა მდგომარეობას დროის რაღაც ფიქსირებულ მომენტში. ჩვეულებრივ მიღებულია საძიებელი ფუნქციის და მისი $n-1$ რიგის წარმოებულის მოცემა როცა

$$t=0:\ u_{\text{გამ}}(0),\ u_{\text{გამ}}'(0),\dots,\ u_{\text{გამ}}^{(n-1)}(0).$$

დიფერენციალური განტოლებების თეორიიდან ცნობილია, რომ (1.31) განტოლების ამოხსნა , რომელიც აკმაყოფილებს ნებისმიერ საწყის პირობებს, წარმოადგენს ჯამს იმ

არაერთგვაროვანი განტოლების რაღაც კერძო ამონახსნისა, რომლის მარჯვენა ნაწილი $f(t)$ განსხვავდება ნულისაგან, და ერთგვაროვანი განტოლების საერთო ამონახსნისა

$$a_n \frac{d^n u_{\text{გამ}}}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1} u_{\text{გამ}}}{dt^{n-1}} + ... + a_1 \frac{du_{\text{გამ}}}{dt} + a_0 u_{\text{გამ}} = 0\,. \qquad (1.35)$$

ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების ამოხსნის პრობლემა დაკავშირებულია სისტემის მახასიათებელი განტოლების ფესვების პოვნასთან

$$a_n\gamma^n + a_{n-1}\gamma^{n-1} + ... + a_1\gamma + a_0 = 0\,. \qquad (1.36)$$

მოცემულ განტოლებას აქვს ზუსტად n ფესვი. რამდენადაც განტოლების კოეფიციენტები ნამდვილია, ფესვები $\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_n$ შეიძლება იყოს როგორც ნამდვილი, ასევე კომპლექსურ-შეუღლებული. თუ ყველა ფესვი განსხვავებულია, მაშინ ერთგვაროვანი განტოლების საერთო ამონახსნს (1.35), რომელიც აღწერს სისტემის ***საკუთარ რხევებს***, აქვს სახე:

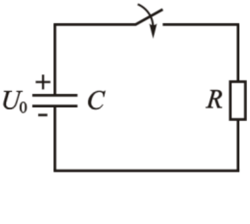
$$u_{\text{გამ}}(t) = C_1 e^{\gamma_1 t} + C_2 e^{\gamma_2 t} + ... + C_n e^{\gamma_n t}\,, \qquad (1.37)$$

სადაც – $C_1, C_2, ..., C_n$ მუდმივი რიცხვებია, რომლებიც განისაზღვრება საწყისი პირობებიდან.

თუ ფესვებიდან ზოგიერთი ჯერადია, მაშინ ერთგვაროვანი განტოლების სართო ამონახსნის მდგენელები რამდენადმე რთულდება ***სეკულიარული*** (*"საუკონოვანი" - ტერმინი ასტრონომიიდან*) მამრავლების გაჩენის ხარჯზე. ამგვარად, თუ γ_i წარმოადგენს k-ს ჯერად ფესვს, მას პასუხობს საკუთარი რხევების $\exp(\gamma_i t),\ t\exp(\gamma_i t),\ ...\ ,\ t^{k-1}\exp(\gamma_i t)$ სახის ერთობლიობა.

განვიხილოთ წრფივ სტაციონარულ წრედებში საკუთარი რხევების მაგალითები.

მაგალითი 3.4. *U_0 ძაბვამდე წინასწარ დამუხტული C ტევადობის კონდენსატორის აპერიოდული განმუხტვა, რომელიც $t=0$ დროის მომენტში იკვრება R წინაღობის რეზისტორით.*



ამოხსნა: *წრედი აღიწერება შემდეგი დიფერენციალური განტოლებით u_c ცვლადის - კონდენსატორზე ძაბვის მიმართ:*

$$\tau\frac{du_c}{dt} + u_c = 0,$$

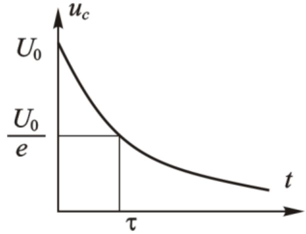
ნახ. 3.4

ერთადერთი $u_c(0) = U_0$, საწყისი პირობის დროს.

τ - დროის მუდმივა $\tau = RC$.

$\tau\gamma + 1 = 0$ მახასიათებელ განტოლებას აქვს ფესვი $\gamma = -1/\tau$. აქედან ვპოულობთ თავისუფალი რხევების განტოლების საერთო ამონახსნს:

$$u_c(t) = A\exp(-t/\tau) .$$



ნახ. 3.5

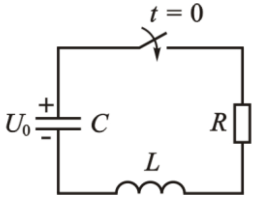
იმისათვის, რომ დავაკმაყოფილოთ საწყისი პირობა, აუცილებელია დავუშვათ $A = U_0$. საბოლოოდ ვღებულობთ

$$u_c(t) = U_0 \exp(-t/\tau) .$$

ამრიგად, მახასიათებელი განტოლების ნამდვილ უარყოფით ფესვს პასუხობს საკუთარი რხევა, რომელიც ექსპონენციალურად მცირდება დროში (იხ. ნახ. 3.5).

ამ წრედის დროის მუდმივა τ არის დროის შუალედი, რომლის განმავლობაშიც თავისუფალი პროცესი მიილევა – $e = 2.71828..$ ჯერ.

მაგალითი 3.5. ***კონდენსატორის რხევითი განმუხტვა.***



ნახ. 3.6

ვთქვათ წინა მაგალითი გართულებულია იმით, რომ წრედში გვაქვს აგრეთვე ინდუქციური ელემენტი L (ნახ. 3.6). წრედის დიფერენციალურ განტოლებას $i(t)$ დენის მიმართ, შედგენილს კირხჰოფის მეორე კანონის საფუძველზე, აქვს სახე

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + 2\alpha \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = 0 , \qquad (1.38)$$

სადაც $\alpha = R/(2L)$, $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$.

პირველი საწყისი პირობა $i(0) = 0$ განპირობებულია კონტურში ინდუქციური ელემენტის არსებობით, ვინაიდან ამ შემთხვევაში დენი ნახტომით არ შეიძლება შეიცვალოს.

დროის საწყის მომენტში ძაბვა კონდენსატორზე წონასწორდება თვითინდუქციის ემძ-ით:

$$U_0 + L\frac{di}{dt}\Big|_{t=0} = 0,$$

საიდანაც გამომდინარეობს მეორე საწყისი პირობა:

$$\frac{di}{dt}\Big|_{t=0} = U_0 / L,$$

მოცემული წრედის მახასიათებელ განტოლებას

$$\gamma^2 + 2\alpha\gamma + \omega_0^2 = 0$$

აქვს კომპლექსურ-შეღლებული ფესვები:

$$\gamma_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -\alpha \pm j\sqrt{j^2\alpha^2 - j^2\omega_0^2} = -\alpha \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = -\alpha \pm j\omega_c ,$$

სადაც ω_c - სისტემის საკუთარი რხევების სიხშირეა. თუ დანაკარგები კონტურში საკმაოდ მცირეა, მაშინ $\omega_0 >> \alpha$, ამიტომ $\omega_c \approx \omega_0$..

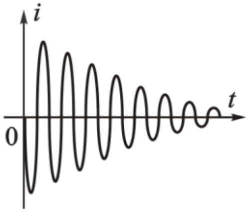
ერთგვაროვანი განტოლების საერთო ამონახსნი

$$i(t) = C_1 e^{\gamma_1 t} + C_2 e^{\gamma_2 t} \qquad (1.39)$$

შეიცავს კოეიციენტებს C_1 და C_2, რომლებიც აკმაყოფილებენ ალგებრულ განტოლებათა სისტემას (იხ. საწყისი პირობები):

$$C_1 + C_2 = 0\,,$$

$$\gamma_1 C_1 + \gamma_2 C_2 = -U_0 / L,$$



საიდანაც $C_1 = \dfrac{-U_0}{j2\omega_c L},\quad C_2 = \dfrac{U_0}{j2\omega_c L}$

ამ კოეფიციენტების (1.39) გამოსახულებაში ჩასმით, საბოლოოდ ვღებულობთ

$$i(t) = -\frac{U_0}{\omega_c L} e^{-\alpha t} \sin\omega_c t. \qquad (1.40)$$

ნახ. 3.7

გრაფიკულად (იხ. ნახ. 3.7)

3.3. დინამიკური სისტემების გადაცემის სიხშირული კოეფიციენტი

თუ წრფივი დინამიკური სისტემის შესასვლელზე მოდის სიგნალი, რომელსაც აქვს $u_{შეს}(t) = \exp(j\omega t)$. სახის კომპლექსური მათემატიკური მოდელი, მაშინ სიგნალი გამოსასვლელზე $u_{გამ}(t) = K(j\omega t)\exp(j\omega t)$. ამ გამოსახულებების ჩასმით (1.30)–ში, საერთო მამრავლზე შეკვეცის შემდეგ ვღებულობთ სისტემის გადაცემის სიხშირულ მახასიათებელს

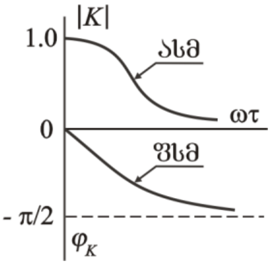
$$K(j\omega) = \frac{b_m (j\omega)^m + b_{m-1}(j\omega)^{m-1} + ... + b_1 (j\omega) + b_0}{a_n (j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + ... + a_1 (j\omega) + a_0}. \qquad (1.41)$$

ამგვარად, ნებისმიერი დინამიკური სისტემის გადაცემის სიხშირული მახასიათებელი, რომელიც აღიწერება ჩვეულებრივი მუდმივკოეფიციენტებიანი დიფერენციალური განტოლებით, წარმოადგენს $j\omega$ ცვლადის წილად-რაციონალურ ფუნქციას; ამ ფუნქციის კოეფიციენტები ემთხვევა დიფერენციალური განტოლების კოეფიციენტებს.

საინჟინრო გამოთვლებში წრფივი სისტემის გადაცემის სიხშირულ მახასიათებელს ხშირად პოულობენ წრედების თეორიის მეთოდებით პრინციპიალური სქემების საფუძველზე დიფერენციალური განტოლებების შედგენის გარეშე. განვიხილოთ ზოგიერთი მაგალითი.

მაგალითი 3.6. *ძაბვის გადაცემის სიხშირული კოეფიციენტი RC წრედისა, რომლის სქემა მოყვანილია მაგალითი 3.1.-ში*

იქნება $$K(j\omega)=\frac{1/(j\omega C)}{R+1/(j\omega C)}=\frac{1}{1+j\omega\tau}, \qquad (1.42)$$



ნახ. 3.8

სადაც $\tau=RC$ *დროის მუდმივაა.* ***ასმ****-ის განტოლებას აქვს სახე*

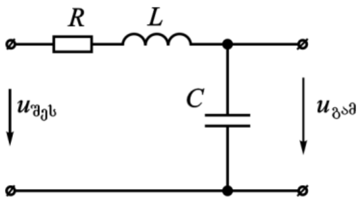
$$\left|K(j\omega)\right|=\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}}.$$

ფსმ *განისაზღვრება შემდეგნაირად:*

$$\varphi_k(\omega)=arctg(\omega\tau).$$

ასმ*-ის სახე გვიჩვენებს, რომ ასეთი წრედი შეიძლება გამოვიყენოთ* ***დაბალი სიხშირეების ფილტრად*** (***დსფ***).

მაგალითი 3.7. *L,C,R ელემენტებზე აგებული Γ - სებრი ოთხპოლუსას ძაბვის გადაცემის სიხშირული კოეფიციენტი. აქ*

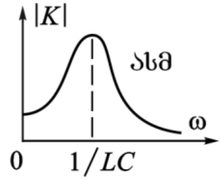


ნახ. 3.9

$$K(j\omega)=\frac{1/(j\omega C)}{R+j\omega L+1/(j\omega C)}=$$

$$=\frac{1}{(1-\omega^2LC)+j\omega RC}$$

საიდანაც გამომდინარეობს ***ასმ****-ის განტოლება*



ნახ. 3.10

$$\left|K(j\omega)\right|=\frac{1}{\sqrt{(1-\omega^2LC)^2+\omega^2R^2C^2}}.$$

და ***ფსმ****-ის განტოლება*

$$\varphi_k(\omega)=-arctg\left[\frac{\omega RC}{1-\omega^2LC}\right].$$

თუ დანაკარგების წინაღობა R *იმდენად მცირეა, რომ სისტემის ვარგისიანობა* $Q=\frac{\sqrt{L/C}}{R}>>1$, *მაშინ მოცემულ წრედს წარმატებით შეუძლია შეასრულოს ზოლური ფილტრის როლი.*