ალასკის ნავთობსადენი

11 რიცხვითი ინტეგრება და დიფერენცირება

პრობლემა: გაზის და ნავთობწარმოების გაუმჯობესება

ალასკის ნავთობსადენის აგებისას მრავალი პრობლემა წარმოიშვა. მათ შორის ერთ-ერთი უმნიშვნელოვანესი იყო ნიადაგის მრადიული ყინულით დაფარული საფარის დაცვა მილსადენის სითბოსაგან. მილში გამავალი ნავთობი თბება მილის კედლებზე ხახუნის გამო, ამიტომ საბჯენები, რომელსაც ეყრდნობა მილსადენი იზოლირებული უნდა იყოს ყინულოვანი ზედაპირისგან, ან მუდმივად ცივდებოდეს, რომ ყინული გალღობისაგან დაიცვას.

შესავალი

შესავალი

ინტეგრება და დიფერენცირება ძირითადი კონცეფციებია გამოთვლით მეთოდებში, რაც ფუნდამენტურ როლს თამაშობს მრავალი საინჟინრო და სამეცნიერო პრობლემის გადაჭრაში. თუ ზოგიერთი პრობლემა მოითხოვს ანალიზურ ამონახსნს ინტეგრებისა და დიფერენცირების საშუალებით, ზოგი მათგანის ამოხსნა შეუძლებელია ანალიზური მეთოდით და საჭირო ხდება რიცხვითი ინტეგრებისა და დიფერენცირების მეთოდის გამოყენება.

ამ თავში განვიხილავთ რიცხვითი ინტეგრაბისა და დიფერენცირების საკითხებს და MATLAB-ის შესაბამის ფუნქციებს.

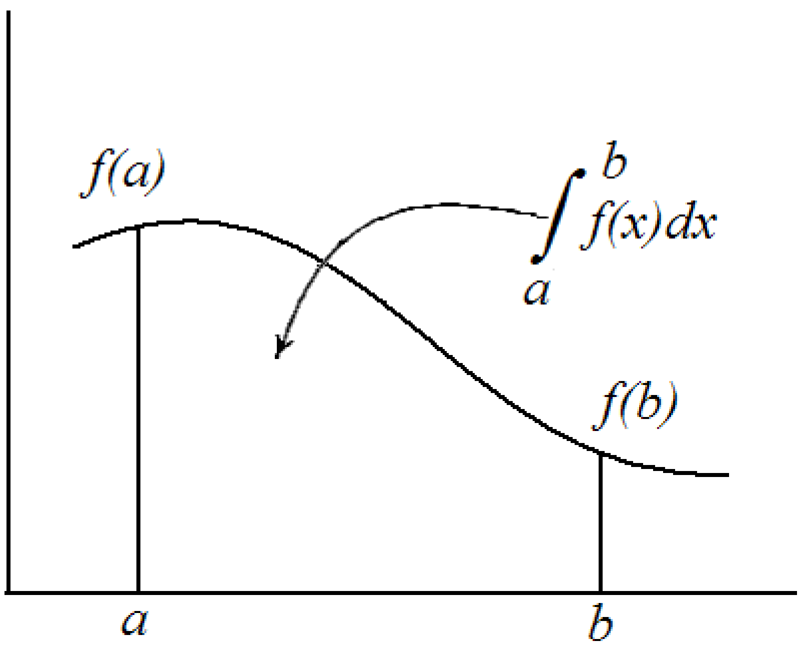
11.1 რიცხვითი ინტეგრება

f(x) ფუნქციის ინტეგრალი [a,b] ინტერვალზე განისაზღვრება როგორც ფართი, რომელსაც შემოსაზღვრავს *f(x)* წირი a-დან b-მდე. როგორც ნახ. 11.1 –ზეა ნაჩვენები თუ ინტეგრალის მნიშვნელობა K ტოლია, *f(x)* ფუნქციის საშუალებით იგი ასე ჩაიწერება:

$$K = \int_a^b f(x)$$

მრავალი ფუნქციისათვის ამ ინტეგრალის გამოთვლა შესაძლებელია ანალიზურად, მაგრამ ზოგიერთი ფიუნქციისათვის, როცა ეს შეუძლებელია, საჭიროა რიცხვით მეთოდებს მივმართოთ. ფუნქციის რიცხვითი ინტეგერების ამოცანა იმაში მდგომარეობს, რომ ინტეგრალქვეშა ფუნქციის მნიშვნელობათა მიხედვით გამოვთვალოთ ინტეგრალის მნიშვნელობა. ერთი ცვლადის ფუნქციის განსაზღვრული ინტეგრალის გამოთვლას ფუნქციის მნიშვნელობათა მიხედვით ზოგჯერ მექანიკურ კვადრატურას უწოდებენ. მექანიკური კვადრატურის ჩვეულებრივი ხერხი იმაში მდგომარეობს, რომ მოცემულ *f(x)* ფუნქციას განსახილველ ინტერვალზე ცვლიან მარტივი სახის მაინტერპოლირებელი ან მააპროქსიმირებელი *g(x)* ფუნქციით (მაგალითად მრავალწევრით).

თუ ფუვქციას ძალიან მცირე ინტერვალებზე წრფის მონაკვეთებით შევცვლით, შეგვიძლია გამოვთვალოთ მიღებული ტრაპეციების ფართობები და შევკრიბოთ. ასე შევაფასებთ წირით შემოფარგლულ ფართს და ვიპოვით ინტეგრალის მნიშვნელობას. შეგვიძლია წრფის მაგიერ კვადრატული ფუნქცია ავიღოთ და ისე შევაფასოთ ინტეგრალის მნიშვნელობა. ამ მეთოდს სიმპსონის წესს უწოდებენ.



ნახ. 11.1 ფუნქციის ინტეგრალი

11.1.1 ტრაპეციის და სიმპსონის მეთოდი

თუ ინტერგრალქვეშა ფუნქციის შესაბამისი წირით შემოფარგლული ფართობი დაყოფილია მცირე ზომის ტრაპეციებად და თუ ინტერვალი [a,b] დაყოფილია n ტოლ ნაწილად მაშინ ფართობი აპროქსიმირდება შემდეგი ფორმულის საშუალებით (ტრაპეციის წესი):

$$K_T = \frac{b-a}{2n}(f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n))$$

სადაც x_i წარმოადგენს ტრაპეციის კიდურა წერტილებს და x_0 =a და x_n =b.
თუ წირით შემოფარგლული ფართი დაყოფილია კვადრატული წირით შემოფარგლულ ნაწილებად და ინტერვალი [a,b] დაყოფილია 2n ტოლ ნაწილად, მაშინ ფარათი აპროქსიმირდება სიმპსონის ფორმულით:

$$K_s = \frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \cdots + 2f(x_{2n-2}) + 4f(x_{2n-1}) + f(x_n))$$

სადაც x_i წარმოადგენს დაყოფის წერტილებს და x_0 =a , x_{2n} =b და h=(b-a)/(2n).

თუ მააპროქსიმებელი ფუნქცია უფრო მაღალი რიგისაა (ტრაპეციის წესი ეყრდნობა წრფივ და სიმპსონის ფორმულა კვადრატულ ფუნქციას) ინტეგრალის მნიშვნელობის გამოსათვლელად სარგებლობენ სხვა მეთოდებით, მაგალითად - გაუს-ლობატოს მეთოდი.

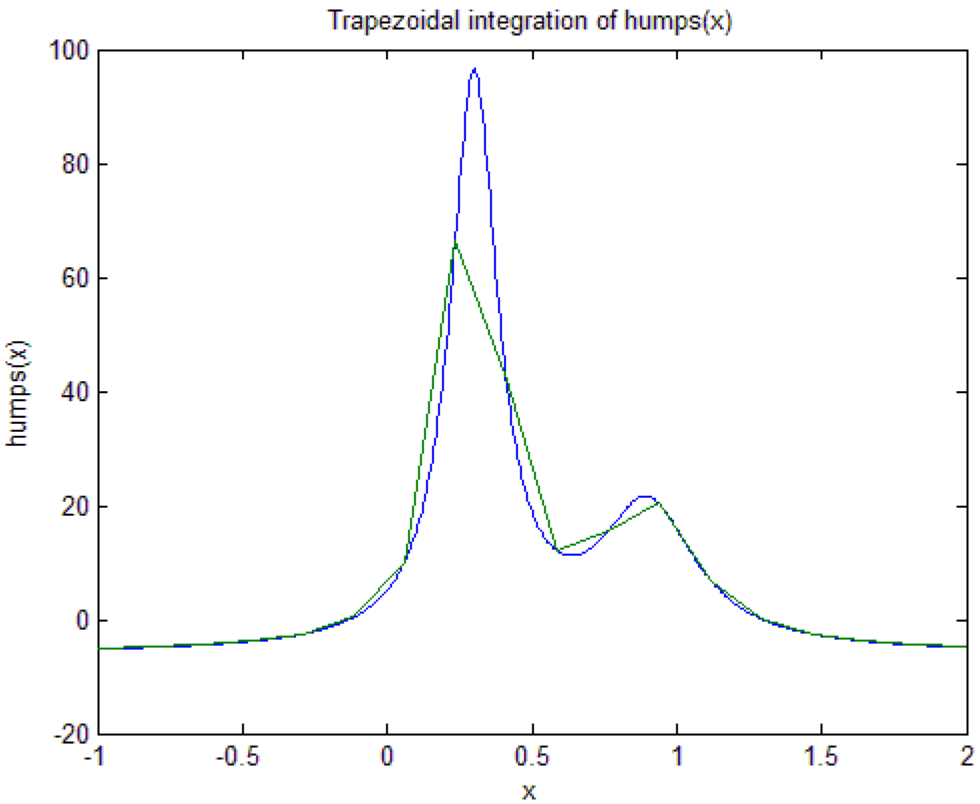
ინტეგრალის მნიშვნელობა უფრო ზუსტია, რაც უფო მცირე მონაკვეთებადაა დაყოფილი ინტერვალი. თუ შევეცდებით ფუნქციის ინტეგრებას (სინგულარობის) წყვეტის წერტილში (სადაც ფუნქცია ან მისი წარმოებული უსასრულობაა ან განსაზღვრული არ არის) დამაკმაყოფილებელ პასუხს ვერ მივიღებთ.

MATLAB ფუნქციები ინტეგრებისათვის

MATLAB -ს გააჩნია ფუნქცია ტრაპეციის წესით ინტეგრებისათვის:

trapz(x,y)	y ფუნქციის ინტეგრალი x-ის მიმართ ტრაპეციის წესით. x და y ერთნაირი სიგრძის ვექტორები უნდა იყოს,

ამ ფუნქციის საილუსტრაციოდ განვიხილოთ ფუნქცია humps(x), ეს MATLAB სადემონსტრაციო ფუნქციაა, აქვს პიკები x=0.3 და x=0.9 მახლობლად ნახ. 11.2.



ნახ. 11.2 ფუნქციის humps(x) გრაფიკი ინტერვალში [-1, 2]

trapz ახდენს ფართის აპროქსიმაციას ტრაპეციის წესით. n=18 ქვეინტერვალისათვის ინტეგრალის აპროქსიმირების პროცესი ასეთია:

```
x = linspace(-1, 2, 18)
y = humps(x);
area = trapz(x,y)

area =
   25.1406
```

თუ ნახაზის მიხედვით ვიმსჯელებთ ინტეგრალის არცთუ ისე კარგ შეფასებას მივიღებთ, მაგარმ თუ x უფრო მცირე ინტერვალებად დავყოფთ, შედეგსაც უკეთესს მივიღებთ.

```
x = linspace(-1,2,401);
y = humps(x);
area = trapz(x,y)
area =
26.3449
```

საინტერესოა ისეთი ინტეგრალის გამოთვლა, რომლის ზედა სზღვარი ცვლადია.

$$\int_a^x f(u)du$$

ინტეგრალის ქვედა საზღვარი განსაზღვრულია, x და y ერთნაირი ზომის ვექტორებია, cumtrapz(x,y) გვაძლევს y ფუნქციის კუმულაციურ ინტეგრალს, იმავე ზომის z ახალ ვექტორს, რომლის n-ური ელემენტი წარმოადგენს ინტეგრალის მნიშვნელობას x(1) დან x(n)-მდე (აპროქსიმირება ხორციელდება ტრაპეციის წესით).

MATLAB-ს ფუნქციის რიცხვითი ინტეგრებისათვის სხვა ფუნქცებიც აქვს. **quad** ფუნქცია ეყრდნობა სიმპსონის ადაპტირებულ ფორმულას, ხოლო **quadl** – გაუს - ლობატოს მეთოდს.

quad ფუნქციის უმარტივესი ფორმა მოითხოვს სამ არგუმენტს: ფუნქციის ბრჭყალებში ჩასმული სახელს, რომელიც გვაძლევს ვექტორს *f(x)* ფუნქციის მნიშვნელობებით, როცა მივაწვდით *x* მნიშვნელობათა ვექტორს; შეიძლება ეს იყოს MATLAB ფუნქციის სახელი, მაგალითად sin ან ჩვენს მიერ შექმნილი ფუნქციი სახელი. მეორე და მესამე არგუმენტი ინტერვალის a და b საზღვრებია, რომელშიც ინტეგრალის მნიშვნელობა გვინდა დავითვალოთ.

quad ფუნქციის საილუსტრაციოდ გამოვთვალოთ ინტეგრალი:

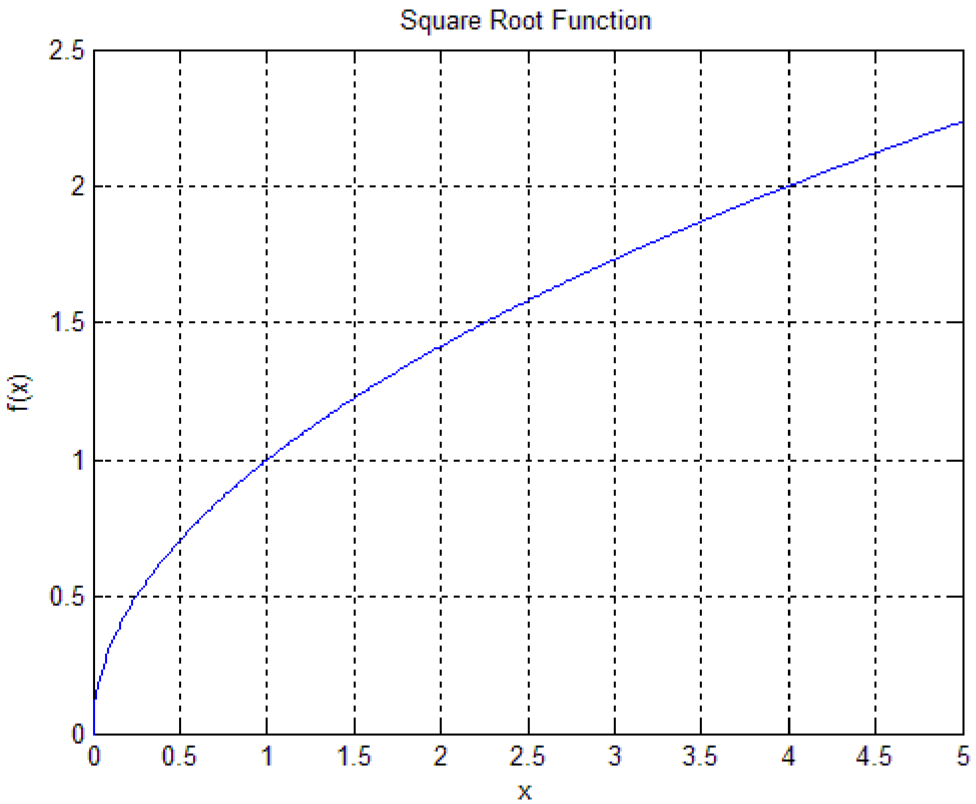
$$K_Q = \int_a^b \sqrt{x}\,dx$$

a და b არაუარყოფით მნიშვნელობათათვის.

$f(x) = \sqrt{x}$ ფუნქციის გრაფიკი ინტერვალში [0,5] წარმოდგენილია ნახაზზე; $x<0$ მნიშვნელობათათვის ფუნქციის მნიშვნელობები კომპლექსური რიცხვებია. ამ ფუნქციის ინტეგრება შესაძლებელია ანალიზურადაც და იგი ტოლია:

$$K = \frac{2}{3}\left(b^{3/2} - a^{3/2}\right)$$

შემდეგი პროგრამა საშუალებას გვაძლევს გამოვთვალოთ ინტეგრალის მნიშვნელობები განსაზღვრულ ინტერვალში **quad** ფუნქციით და ანალიზურად:



ნახ. 11.3 ფუნქცია $f(x)=\sqrt{x}$

```
%
%     This program compares the quad function with the
%     analytical results for the integration of the
%     square root of x over an interval [a, b], where
%     a and b are non-negative
%
a = input('Enter laft endpoint >= 0  ');
b = input('Enter right endpoint >= 0  ');
k = 2/3*(b^(1.5) - a^(1.5));
kq = quad('sqrt',a,b);
kq1 = quadl('sqrt',a,b);
fprintf(‘Analytical: %f\n Numerical: %f%f%f’, k, kq, kq1)
```

შევამოწმოთ პროგრამა სხვადასხვა ინტერვალზე:

ინტერვალი [0.5, 0.6]

```
Analytical:   0.074136
Numerical:   0.074136  0.074136
```

ინტერვალი [0, 0.5]

```
Analytical:   0.235702
Numerical:   0.235695  0.235702
```

ინტერვალი [0, 1]

```
Analytical:   0.666667
Numerical:   0.666660  0.666665
```

quad და **quadl** ფუნქციებს შეიძლება ჰქონდეთ მეოთხე არგუმენტიც: დასაშვები მნიშვნელობა(tolerance) ფუნქციის ინტეგრება იქამდე გრძელდება, ვიდრე ცთომილება ამ პარამეტრზე ნაკლებია:

(წინა შეფასება - მიმდინარე შეფასება)/წინა შეფასება < დასაშვები მნიშვნელობა

თუ ეს პარამეტრი თავიდან არაა მითითებული, მის მნიშვნელობად ითვლება 0.001. თუ ამ ფუნქციებს აქვთ მეხუთე, არანულოვანი არგუმენტი, ინტეგრალის საბოლოო მნიშვნელობასთან ერთად შუალედური საფეხურის მნიშვნელობებსაც მოგვცემს.

თუ ფუნქციას გააჩნია სინგულარობის წერტილები შუალედის შიგნით, ინტერვალი რამდენიმე ქვეინტერვალად უნდა დაიყოს და ისე გამოითვალოს საბოლოო მნიშვნელობა, ხოლო სინგულარობის წერტილებში ინტეგრალის მნიშვნელობა შეფასდეს სხვა მეთოდით, მაგალითად ლოპიტალის წესით.

სავარჯიშო

მოცემულია ფუნქცია $f(x)=|x|$, გამოთვალეთ შემდეგი ინტეგრალი ანალიზურად და **quad** ფუნქციის საშუალებით. შედეგები შეადარეთ ერთმანეთს:

1. $\int_{0.5}^{0.6} |x|\,dx$
2. $\int_{0.0}^{1} |x|\,dx$
3. $\int_{-1}^{-0.5} |x|\,dx$
4. $\int_{-1}^{0} |x|\,dx$
5. $\int_{-0.5}^{0.5} |x|\,dx$

✍ პრობლემა: მილსადენში ნავთობის ნაკადის მოძრაობის ანალიზი

ამ მაგალითში გავაანალიზებთ მილსადენში ნავთობის ნაკადის დინებას. წრიულ მილში სითხის დინების ანალიზს გამოყენების მრავალი სფერო გააჩნია, მათ შორის სისხლის დინება არტერიებსა და ვენებში, წყალმომარაგების სისტემა ქალაქში, ირიგაციული სისტემა სოფლის მეურნეობაში, მელნის ნაკადი ჭავლური ტიპის პრინტერში და სხვა.

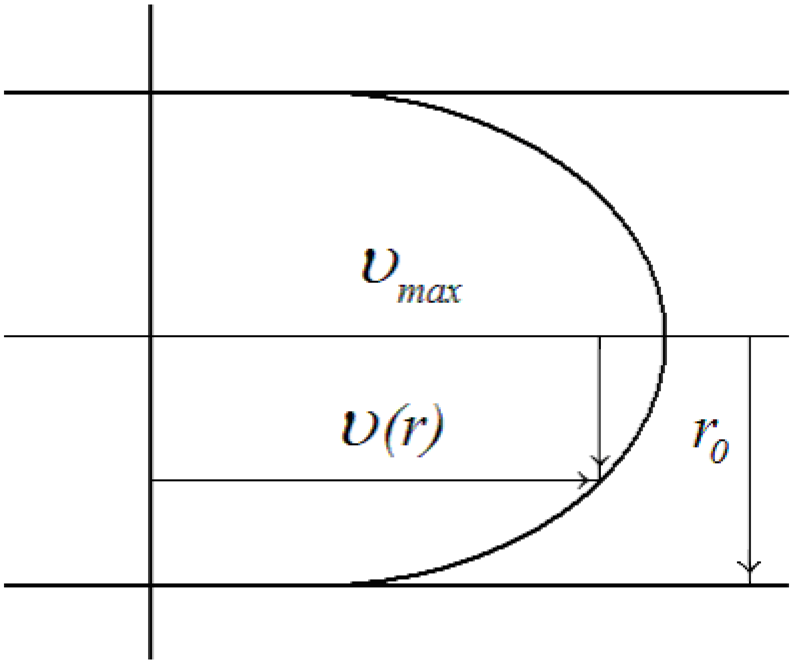
წრიულ მილში სითხის დინებისას ხახუნი მილის კედლებზე განაპირობებს 'სიჩქარის პროფილს'. სითხის ის ნაწილი, რომელიც უშუალოდ ეხება მილის კედლებს, თითქმის არ მოძრაობს, ხოლო მილის ცენტრში გამავალი სითხე ყველაზე სწრაფად მოძრაობს. ნახ. 11.4 მოცემული დიაგრამა გვიჩვენებს როგორ იცვლება მილში გამდინარე ნავთობის სიჩქარე მილის დიამეტრის გასწვრივ და განსაზღვრავს ანალიზისათვის საჭირო ცვლადებს. სიჩქარის პროფილს აღწერს შემდეგი განტოლება:

$$\upsilon(r) = \upsilon_{\max}\left(1 - \frac{r}{r_0}\right)^{1/n}$$

n მთელი რიცხვია 5 -სა და 10 -ს შორის, რომელიც განსაზღვრავს ნაკადის ფორმას (forward flow). ჩვენს შემთხვევაში n=8. მილში ნაკადის საშუალო სიჩქარე გამოითვლება სიჩქარის პროფილის ინტეგრებით 0-დან მილის რადიუსის r_0 მნიშვნელობამდე, ფორმულით:

$$\upsilon_{ave} = \frac{\int_0^{r_0} \upsilon(r) 2\pi r\, dr}{\pi r_0^2} = \frac{2\upsilon_{\max}}{r_0^2}\int_0^{r_0} r\left(1 - \frac{r}{r_0}\right)^{1/n} dr$$

n და $\upsilon_{\max}$ მნიშვნელობები შესაძლებელია გაიზომოს ექსპერიმენტულად, r_0 მილის რადიუსია. დაწერეთ MATLAB პროგრამა, რომელიც სიჩქარის პროფილის ინტეგრებით განსაზღვრავს მილში ნავთობის ნაკადის მოძრაობის საშუალო სიჩქარეს.



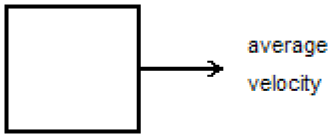
ნახ. 11.4 მილში გამდინარე ნავთობის სიჩქარის პროფილი

1. **ამოცანის დასმა**

გამოვთვალოთ მილში გამდინარე ნავთობის საშუალო სიჩქარე.

2. **INPUT/OUTPUT აღწერა**

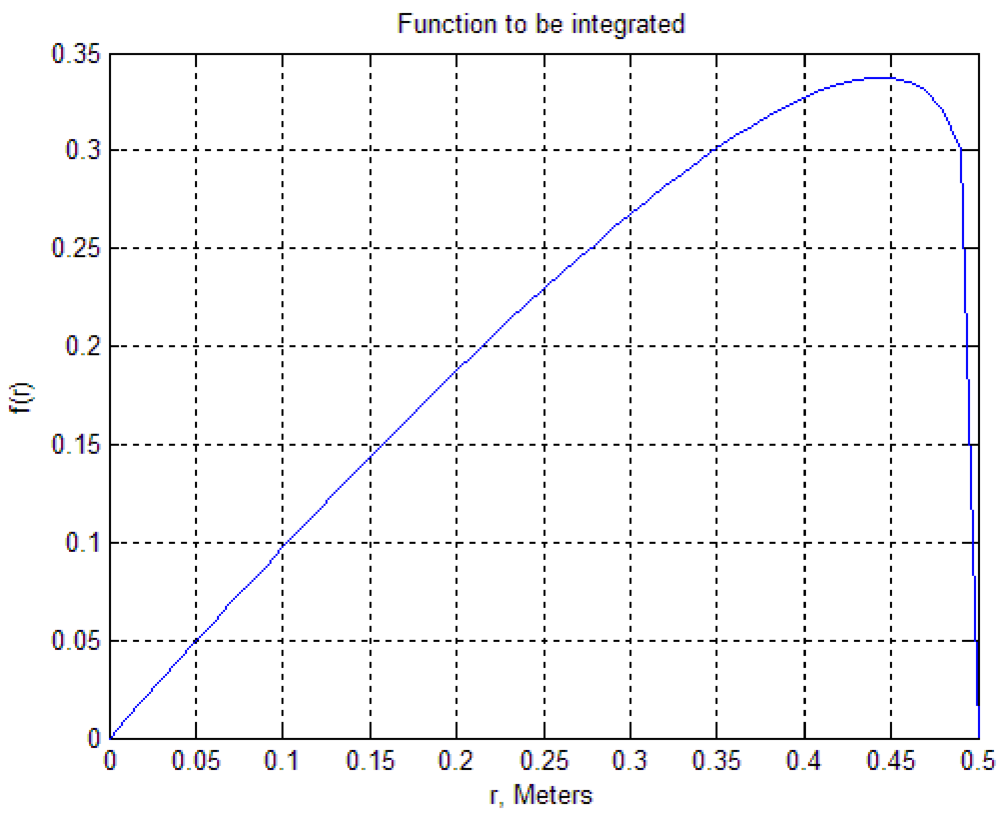
როგორც ნახ. 11.5 დიაგრამა უჩვენებს, პროგრამამ შედეგად უნდა მოგვცეს მილში გამდინარე ნავთობის ნაკადის საშუალო სიჩქარე. ნაკადის სიჩქარის უდიდესი მნიშვნელობა $\upsilon_{\max}$, მილის რადიუსი r_0 და n პროგრამაში განსაზღვრულია როგორც მუდმივი სიდიდეები.



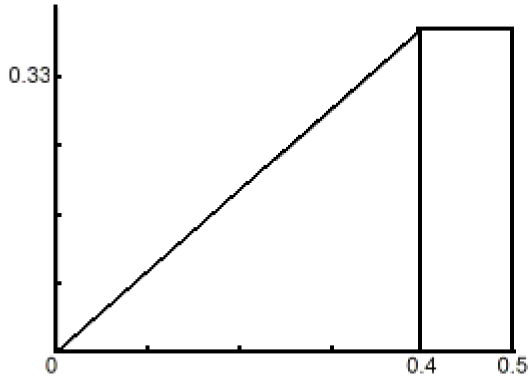
ნახ. 11.5 I/O დიაგრამა

3. სახელდახელო ამოხსნა

თუ დავუშვებთ, რომ r_0=0,5 მ, n=8, შეგვიძლია ავაგოთ $r(1-r/r_0)^{1/n}$ ფუნქციის გრაფიკი, რომელიც ნაჩვენებია ნახ. 11.6 ამ ფუნქციის ინტეგრალის საშუალო მნიშვნელობა შეგვიძლია შევაფასოთ ამ ნახაზიდან იმ სამკუთხედებისა და მართკუთხედების ჯამის საშუალებით(ნახ. 11.7), რომელთაც შემოწერს ფუნქციის გრაფიკი:



ნახ. 11.6 მილში გამდინარე ნავთობის ნაკადის სიჩქარის პროფილი



ნახ. 11.7 ინტეგრალის აპროქსიმირება

ფართობი = 0.5(0.4)(0.35)=0.105

გავამრავლოთ მიღებული ფართობი $2\upsilon_{max}/r_0^2$, რომ მივიღოთ სიჩქარის საშუალო მნიშვნელობა. თუ დავუშვებთ, რომ υ_{max} = 1.5, მივიღებთ სიჩქარის საშუალო მნიშვნელობას 1.260.

4. MATLAB ამოხსნა

ინტეგრალის გამოსათვლელად ვისარგებლოთ **quad** ფუნქციით. მისი ერთ-ერთი პარამეტრია იმ ფუნქციის სახელი, რომელიც გამოითვლის ინტეგრალქვეშა ფუნქციის მნიშვნელობებს. ამიტომ უნდა დავწეროთ M-ფუნქცია, რომელიც გამოითვლის ინტეგრალქვეშა ფუნქციის მნიშვნელობებს. პროგრამაშიც და ფუნქციაშიც მუდმივების სახით უნდა შევიტანოთ შემდეგი სიდიდეების მნიშვნელობები: υ_{max}, r_0 .

```
%
%     This program computes the value of the
%     averaje flow velosuty for a pipeline
%     using numerical integration.
%
vmax = 1.5;
r0 = 0.5;
%
integral = quad('velocity', 0, 0.5)
%
ave_velocity = (2*vmax/(r0^2))*integral
```

უნდა შევქმნათ აგრეთვე M-ფაილი velocity.m რომელიც განსაზღვრავს ინტეგრალქვეშა ფუნქციას:

```
function v = velocity(r)
%     VELOCITY     This function is related to the
%     average flow velocity of the pipe.
%
r0 = 0.5;
```

```
n = 8;
%
v = r.*(1-r/r0).^(1/n);
```

5. შემოწმება

შედეგად მივიღებთ :

```
integral =
           0.1046
ave_velocity =
           1.2548
```

ჩვენს მიერ შეფასებული მნიშვნელობები იყო: 0.105 და 1.260, შესაბამისად.

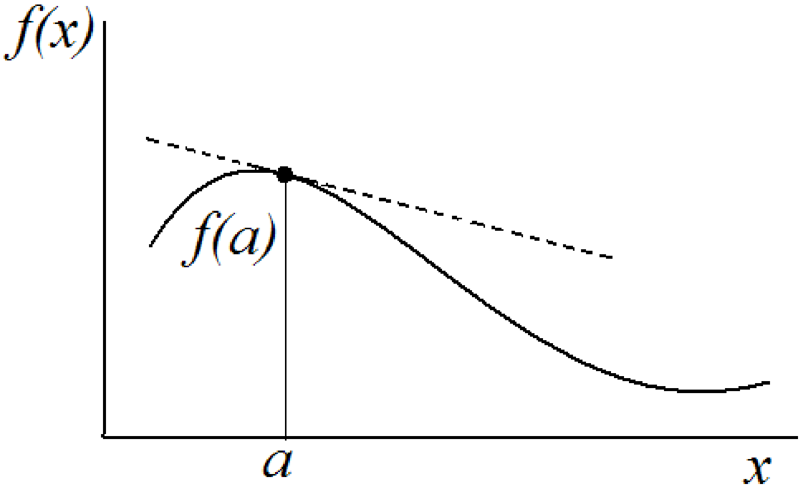
11.2 რიცხვითი დიფერენცირება

ფუნქციის *f(x)* წარმოებული არის ახალი ფუნქცია *f′(x)* რომელიც განისაზღვრება როგორც *x* არგუმენტის ცვლილების სიჩქარე. იგი განისაზღვრება როგორც ფუნქციის ნაზრდის თანაფარდობა არგუმენტის ნაზრდთან.

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$$

მრავალი ფიზიკური პროცესის შესწავლისას გვჭირდება შევაფასოთ ცვლადის ცვლილების სიჩქარე. მაგალითად, სიჩქარე მდებარეობის ცვლილების ზომაა (მ/წმ), ხოლო აჩქარება - თავად სიჩქარის ცვლილების (მ/წმ^2). შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ აჩქარების ინტეგრალი სიჩქარის ტოლია, ხოლო სიჩქარის ინტეგრალი - მანძილის. ამრიგად ინტეგრება და დიფერენცირება ურთიერთშებრუნებული პროცესებია, ფუნქციის წარმოებულის ინტეგრება საწყის ფუნქციას გვაძლევს. ინტეგრალის წარმოებული იძლევა საწყის ფუნქციას მუდმივი სიდიდის სხვაობით.

გეომეტრიულად ფუნქციის წარმოებული წარმოადგენს მოცემულ წერტილში ფუნქციის მხების მიერ x ღერძთან შედგენილი კუთხის ტანგენსს. a წერტილში ფუნქციის წარმოებულუი *f(a)* ნაჩვენებია ნახ. 11.8.



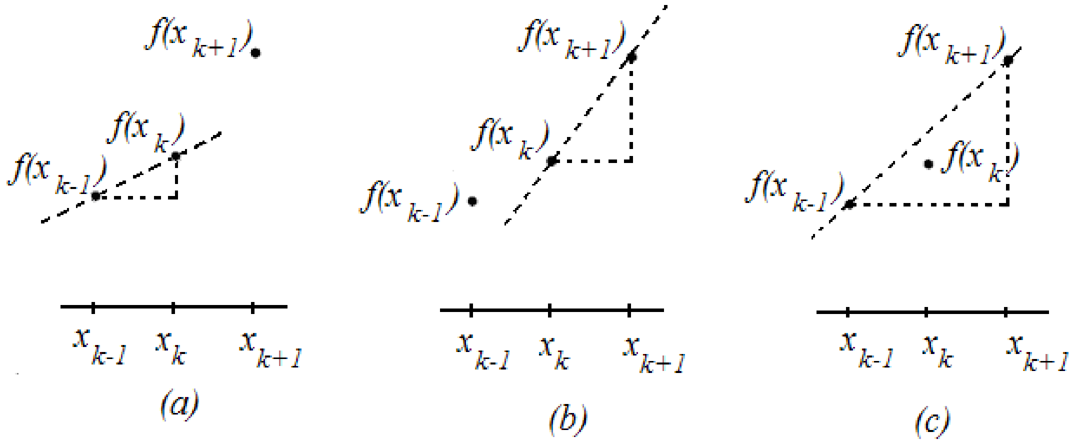
ნახ. 11.8 *f*(*x*) ფუნქციის წარმოებული a წერტილში

რადგან ფუნქციის წარმოებული მოცემულ წერტილში ამ წერტილზე გავლებული მხების დახრაა, თუ ვიცით, რომ ფუნქციის წარმოებული მოცემულ წერტილში ნულის ტოლია, მაშინ ამ წერტილში გავლებული მხები ჰორიზონტალური წრფე იქნება. ფუნქციის იმ წერტილებს, სადაც წარმოებული ნულის ტოლია ფუნქციის კრიტიკულ წერტილებს უწოდებენ და ეს შეიძლება იყოს ფუნქციის ჰორიზონტალური არე, ლოკალური მაქსიმუმი ან მინიმუმი. (შეიძლება ასეთი წერტილი გლობალური მაქსიმუმი ან მინიმუმიც იყოს, ამის დასადგენად ფუნქციის შემდგომი ანალიზია საჭირო). თუ ფუნქციას გავაწარმოებთ რაიმე ინტერვალში და ვნახავთ, რომ წარმოებულის ნიშანი იცვლება, ეს იმიზე მიუთითებს, რომ ფუნქციას ამ ინტერვალში ლოკალური მინიმუმი ან მაქსიმუმი გააჩნია. იმის შესაფასებლად მაქსიმუმთან გვაქვს საქმე თუ მინიმუმთან მეორე წარმოებულს უნდა მივმართოთ(მეორე წარმოებული მიიღება ფუნქციის წარმოებულის გაწარმოების შედეგად). თუ მოცემულ წერტილში ფუნქციის მეორე წარმოებული დადებითია, მაშინ ფუნქციის მნიშვნელობა მოცემულ წერტილში – ლოკალური მინიმუმია და პირიქით, თუ მეორე წარმოებული მოცემულ წერტილში უარყოფითია, ამ წერტილში ფუნქციას მაქსიმუმი გააჩნია.

11.2.1 დიფერენცირება

რიცხვითი დიფერენცირების მეთოდი განსაზღვრავს მოცემულ x_k წერტილში ფუნქციის წარმოებულის მნიშვნელობას ამ წერტილში გავლებული მხების აპროქსიმირებით x_k წერტილში ფუნქციის მნიშვნელობათა გამოყენებით. აპროქსიმირება შეიძლება მოხდეს რამდენიმე გზით. შევხედოთ ნახ. 11.9, ნახ. 11.9(a) მიუთითებს, რომ წარმოებული x_k წერტილში შეფასდება $f(x_{k-1})$ და $f(x_k)$ წერტილებზე გავლებული წრფის დახრით:

$$f'(x) = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$



ნახ. 11.9 *f(x)* ფუნქციის წარმოებულის გამოთვლის სხვადასხვა ხერხი

ამგვარად შეფასებულ წარმოებულს მარცხენა უწოდებენ. ნახ. 11.9*(b)* უჩვენებს, რომ აპროქსიმირება ხდება წრფის დახრით, რომელიც გაივლის წერტილებზე $f(x_{k+1})$ და $f(x_k)$:

$$f'(x) = \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{x_{k+1} - x_k}$$

ამგვარად შეფასებულ წარმოებულს მარჯვენა დიფერენციალურ აპროქსიმირებას უწოდებენ. ჩვეულებრივ იგულისხმება, რომ x_k მდებარეობს x_{k-1}-სა და x_{k+1} შორის. ამ ორივე შემთხვევაში წარმოებულის შეფასების სიზუსტე დამოკიდებულია წერტილებს შორის მანძილზე. წარმოებულის გამოთვლის მაღალი სიზუსტე მიიღწევა წერტილებს შორის მანძილების შემცირებით.

f(x) ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებული მისი წარმოებულის წარმოებულს ეწოდება:

$$f''(x) = \frac{df'(x)}{dx}$$

ეს ფუნქცია შეფასდება პირველი წარმოებულის საშუალებით. ამრიგად თუ გამოვიყენებთ მარცხენა დიფერენცირებას, მივიღებთ:

$$f''(x) = \frac{f'(x_k) - f'(x_{k-1})}{x_k - x_{k=1}}$$

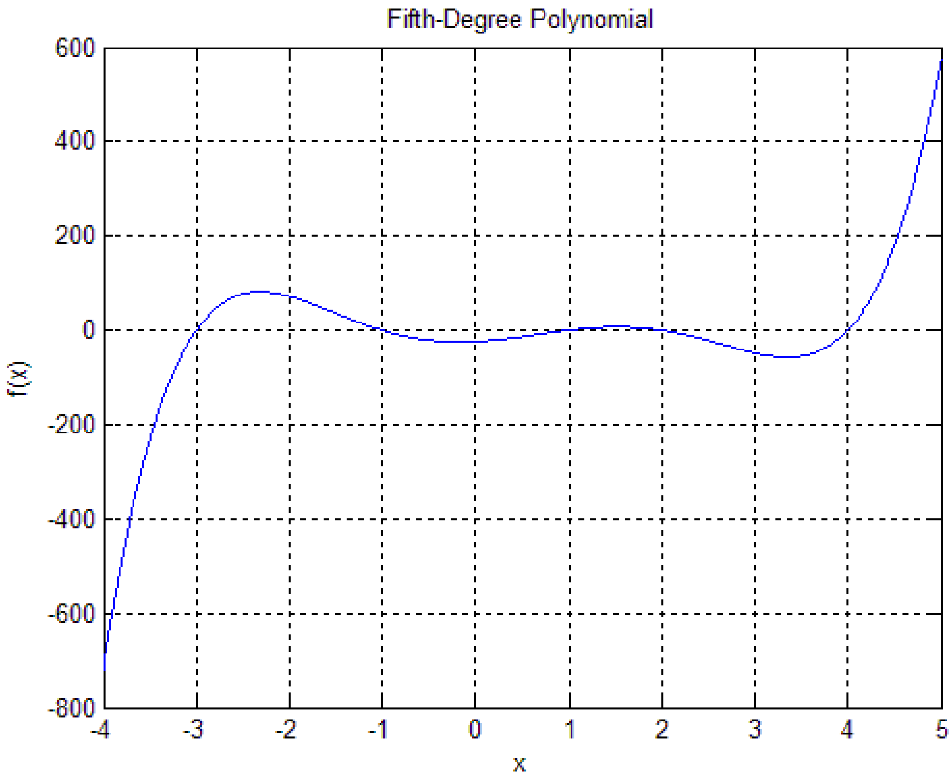
diff ფუნქცია გამოითვლის სხვაობებს ვექტორში ურთიერთმომდევნო ელემენტებს შორის და გვაძლევს ახალ ვექტორს, რომლის ელემენტების რაოდენობა 1-ით ნაკლებია. თუ მისი არგუმენტი მატრიცაა, აღწერილ ოპერაციას ასრულებს მატრიცის თითოეული სვეტისათვის). დავუშვათ ვექტორი x შეიცავს ელემენტებს: [0, 1, 2, 3, 4, 5], ხოლო y –[2, 3, 1, 5, 8, 10], მაშინ diff(x) = [1, 1, 1, 1, 1], diff(y) = [1, -2, 4, 3, 2] y ფუნქციის წარმოებული x-ით იქნება dy = diff(y)./diff(x). ყურადღება მიაქციეთ, რომ წარმოებულის ეს მნიშვნელობები სწორ შედეგს იძლევა როგორც მარცხენა, ისე მარჯვენა დიფერენცირების ფორმულებისათვის. განსხვავება ორი სხვადასხვა მეთოდით გამოთვლილ წარმოებულს შორის განისაზღვრება x ვექტორის მნიშვნელობებით, რომელიც შეესაბამება წარმოებულს dy. თუ x შესაბამისი მნიშვნელობებია [1, 2, 3, 4, 5], მაშინ dy გამოითვლის მარცხენა დიფერენციალს,

თუ x შესაბამისი მნიშვნელობებია [0, 1, 2, 3, 4], მაშინ dy გამოითვლის მარჯვენა დიფერენციალს.

დავუშვათ მოცემულია ფუნქცია:

$$f(x) = x^5 - 3x^4 - 11x^3 + 27x^2 + 10x - 24$$

ამ ფუნქციის გრაფიკი ნაჩვენებია ნახ. 11.10. დავუშვათ გვინდა გამოვითვალოთ ამ ფუნქციის წარმოებული ინტერვალში [-4, 5], მარცხენა დიფერენცირების ხერხით. შეგვიძლია გამოვიყენოთ ფუნქცია diff. df წარმოადგენს f′(x), ხოლო xd x-ის შესაბამის მნიშვნელობებს.



ნახ. 11.10 მეხუთე ხარისხის პოლინომის მრუდი

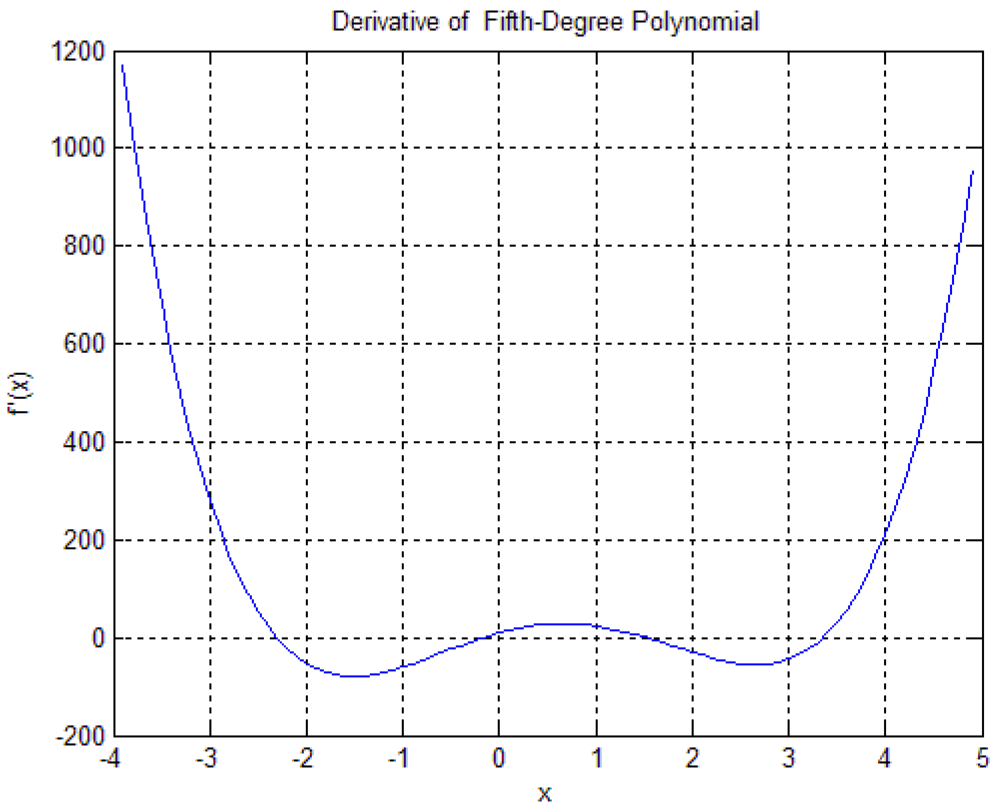
```
x=-4:0.1:5;
f = x.^5 -3*x.^4 - 11*x.^3 + 27*x.^2 + 10*x -24;
df = diff(f)./diff(x);
xd = x(2:length(x));
```

ნახ. 11.11 წარმოადგენს წარმოებულის გრაფიკს. დააკვირდით, წერტილები, სადაც ფუნქციის წარმოებული ნულს უტოლდება ფუნქციის ლოკალურ მინიმუმსა და მაქსიმუმს შეესაბამება. ამ ფუნქციას არ გააჩნია გლობალური მინიმუმი და მაქსიმუმი, იმიტომ რომ იგი ვრცელდება -∞ -დან +∞ -მდე. შეგვიძლია ვიპოვოთ ამ ფუნქციის კრიტიკულ მნიშვნელობათა მდებარეობა (x = -2.3, -0.2, 1.5, 3.4) შემდეგი ბრძანებებით:

```
product = df(1:length(df)-1).*df(2:length(df));
critical =xd(find(product<0))
```

ამ გამოსახულებაში ფუნქცია **find** განსაზღვრავს იმ ელემენტის ინდექსს ვექტორში **product**, რომლის შესაბამისი df(k) ნულის ტოლია. შემდეგ ეს ინდექსი გამოყენებულია xd ვექტორის

იმ ელემენტების საპოვნელად, რომელიც კრიტიკულ წერტილს შეესაბამება (x-ის იმ მნიშვნელობებს, სადაც ფუნქციის წარმოებული ნულის ტოლია).



ნახ. 11.11 მეხუთე ხარისხის პოლინომის წარმოებულის მრუდი

ცენტრალურ წარმოებულს x და f ვექტორებზე დაყრდნობით შემდეგი ბრძანებების საშუალებით ვიპოვით:

```
numerator = f(3 : length(f)) – f(1 : length(f) – 2);
denomirator = x(3 : length(x)) – x(1 : length(x) – 2);
dy = numerator./denomirator;
xd = x(2 : length(x) – 1);
```

ჩვენს მიერ განხილულ მაგალითში დავუშვით, რომ ფუნქცია წარმოებადია, მაგრამ მრავალ ამოცანაში მოცემული გვაქვს ექსპერიმენტული მონაცემები და შეუძლებელია ავირჩიოთ წერტილები ერთმანეთთან ისე ახლოს, რომ წარმოებულის მნიშვნელობები ზუსტად განვსაზღვროთ. ასეთ შემთხვევაში მივმართავთ მე-9 თავში აღწერილ მეთოდს. ვიპოვით მრავალწევრს, რომელიც ამ მონაცემებს შეესაბამება და ისე გამოვითვლით მიღებული ფუნქციის წარმოებულს.

სავარჯიშო

თითოეული გამოსახულებისათვის ააგეთ ფუნქციის, მისი პირველი წარმოებულის და მისი მეორე წარმოებულის გრაფიკი ინტერვალში [-10,10]. შემდეგ MATLAB

ბრძანებების საშუალებით იპოვეთ და დაბეჭდეთ ლოკალური მინიმუმის, ლოკალური მაქსიმუმის და x -ის შესაბამისი მნიშვნელობები.

1. $g_1(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8$
2. $g_2(x) = x^2 + 4x + 4$
3. $g_3(x) = x^2 - 2x + 2$
4. $g_4(x) = 10x - 24$
5. $g_5(x) = x^5 - 4x^4 - 9x^3 + 32x^2 + 28x - 48$
6. $g_6(x) = x^5 + 3x^4 - 4x^3 - 26x^2 - 40x - 24$
7. $g_7(x) = x^5 - 9x^4 + 35x^3 - 65x^2 + 64x - 26$
8. $g_8(x) = x^5 - 3x^4 + 4x^3 + 32x^2 - 4x + 4$

დასკვნა

ამ თავში განვიხილეთ რიცხვითი ინტეგრება და დიფერენცირება. რიცხვითი ინტეგრაბა ხდება წირით შემოფარგლული ფართის აპროქსიმირებით, ხოლო დიფერენცირება ფუნქციის მრუდის მოცემულ წერტილზე გავლებული მხების აპროქსიმირებით. გავეცანით MATLAB ფუნქციებს ინტეგრებისათვის - **quad** და **quadl,** რომლებიც ეყრდნობა სიმპსონის და გაუს - ლობატოს მეთოდებს შესაბამისად. ორივე ფუნქციისათვის საჭიროა, რომ ფუნქცია იყოს ან MATLAB – ის ძირითადი ფუნქცია, ან ჩვენს მიერ M-ფაილის სახით წარმოდგენილი MATLAB ფუნქცია. წარმოებულის გამოთვლას MATLAB –ში ემსახურება ფუნქცია **diff,** რომელიც გამოითვლის სხვაობებს ვექტორის მეზობელ ელემენტებს შორის. გამოითვლება ამგვარი სხვაობები როგორც არგუმენტის, ისე ფუნქციისათვის და მივიღებთ წარმოებულს: diff(f)./diff(x).

ბრძანებები და ფუნქციები

trapz	გამოითვლის ინტეგრალს ტრაპეციის წესით
cumtrapz	გვაძლევს ფუნქციის კუმულაციურ ინტეგრალს
diff	გამოითვლის სხვაობებს ვექტორის მეზობელ ელემენტებს შორის
quad	გამოითვლის ინტეგრალს (სიმპსონის წესით)
quadl	გამოითვლის ინტეგრალს (გაუს-ლობატოს წესით)

ამოცანები

1-4 ამოცანა დაკავშირებულია ამ თავში განხილულ ამოცანასთან, ხოლო 5 – 11 ახალ პრობლემებს უკავშირდება.

მილსადენში სითხის ნაკადის ანალიზი.

1. ამ პრობლემაში აღწერილი პარამეტრების საშუალებით ააგეთ სიჩქარის პროფილი.
2. შეადგინეთ ცხრილი, რომელიც უჩვენებს სითხის ნაკადის საშუალო სიჩქარეს n სიდიდის სხვადასხვა მნიშვნელობებისათვის 5-დან 10-მდე.

3. შეადგინეთ ცხრილი, რომელიც უჩვენებს ნავთობის ნაკადის საშუალო სიჩქარეს მილის რადიუსის სხვადასხვა მნიშვნელობათათვის: 0.5, 1.0, 1.5 და 2.0. სხვა პარამეტრები უცვლელად დატოვეთ.
4. შეცვალეთ პროგრამა ისე, რომ საშუალება გვქონდეს მივაწოდოთ პროგრამას $\upsilon_{\max}$ მნიშვნელობა.

ტრაექტორიის მონაცემთა ანალიზი. დავუშვათ მოცემული გვაქვს **ASCII** ფაილი altitude.dat, რომელიც შეიცავს იმფორმაციას ორი სვეტის სახით: დრო და ახალი ტიპის მეტეოროლოგიური რაკეტის სიმაღლის შეასაბამისი მნიშვნელობა. ამ მონაცემების საფუძველზე ამოხსენით შემდეგი ამოცანები:

5. გამოთვალეთ და ააგეთ რაკეტის სიჩქარის მნიშვნელობა დროის ყოველ მომენტში მარცხენა დიფერენცირების მეთოდით.
6. გამოთვალეთ და ააგეთ რაკეტის აჩქარების მნიშვნელობა დროის ყოველ მომენტში მარცხენა დიფერენცირების მეთოდით.
7. განსაზღვრეთ რაკეტის საფეხურების, ეტაპების, (stages) რაოდენობა რაკეტისათვის. (მითითება: განიხილე კრიტიკული წერტილები).
8. ააგეთ სიჩქარის გრაფიკი დიფერენცირების სამივე მეთოდის საშუალებით გამოთვლილი მონაცემებისათვის ერთიდაიგივე ნახაზზე.
9. აიღეთ საწყის ინფორმაციად რაკეტის აჩქარების მნიშვნელობები, რომელიც გამოითვალეთ მე-6 ამოცანაში. მათი ინტეგრების საშუალებით მიიღეთ სიჩქარის მნიშვნელობები. (ვერ გამოიყენებთ **quad** ფუნქციას, რადგან მხოლოდ წერტილის (მნიშვნელობები) კოორდინატები გაქვთ. ისარგებლეთ ტრაპეციის ან სიმპსონის წესით.)
10. აიღეთ საწყისად რაკეტის სიჩქარის მნიშვნელობები, რომელიც გამოითვალეთ მე-5 ამოცანაში. მათი ინტეგრების საშუალებით მიიღეთ რაკეტის სიმაღლის შესაბამისი მნიშვნელობები. (ვერ გამოიყენებთ **quad** ფუნქციას, რადგან მხოლოდ წერტილის (მნიშვნელობები) კოორდინატები გაქვთ. ისარგებლეთ ტრაპეციის ან სიმპსონის წესით.)

ფუნქციის ანალიზი. ეს ამოცანა რიცხვით ინტეგრებას უკავშირდება.

11. დავუშვათ მოცემული გვაქვს ფუნქცია:

$$f(x) = 4e^{-x}$$

ააგეთ ფუნქციის გრაფიკი ინტერვალში [0,1]. გამოიყენეთ რიცხვითი ინტეგრების მეთოდი და გამოთვალეთ *f(x)* ფუნქციის ინტეგრალი ინტერვალში[0, 0.5] და [0, 1].